Departamento de Matemática - Secção de Probabilidades e Estatística

Probabilidades e Estatística

LQ, MEBiol, MEQ, LEMat, LEIC-A, MA, MEFT, MEBiom, LMAC,
MEAmbi, MEAer, MEMec, LEAN, LET, MEC, LEGM, MEEC

1.º semestre – 2009/10 | 2.º Teste/2.º Exame
2/02/2010 – 9 horas | Duração: 1 hora e 30 minutos/3 horas

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
- Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
- **Justifique** convenientemente todas **as respostas**.

Grupo I *5 valores*

1. Sejam A e B dois acontecimentos mutuamente exclusivos (ou disjuntos), ambos relativos ao mesmo espaço de resultados. Mostre que A e B são independentes apenas se pelo menos um deles tiver probabilidade nula. (1.0)

2. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar peças de um lote homogéneo, com reposição e sem privilegiar nenhum dos elementos durante a extracção, as quais serão testadas até encontrar uma que tenha resultado positivo num dado teste. Sabe-se que a probabilidade de uma qualquer peça do lote ter resultado positivo no teste em causa é $3/4$.

   Seja X a variável aleatória que representa o número de peças a testar até encontrar uma que tenha resultado positivo no referido teste. Indique a função de probabilidade de X e calcule a probabilidade de X ser um número par. (1.5)

3. Uma central telefónica recebe um fluxo de chamadas de acordo com um processo de Poisson com número esperado de chamadas por hora igual a 90 (considera-se desprezável o tempo de atendimento e encaminhamento de uma chamada para o seu destinatário).

   (a) Calcule a probabilidade de chegarem pelo menos duas chamadas no próximo minuto. (1.0)

   (b) Se o número médio de chamadas por hora fosse apenas 5, qual seria o tempo máximo disponível para a telefonista ir tomar café sem correr um risco superior a 0.15 de deixar chamadas por atender? (1.5)

Grupo II *5 valores*

1. Sabe-se que o tempo de vida (duração até fundir) de lâmpadas de 40 W de uma certa marca tem valor esperado igual a 600 horas e desvio padrão igual a 30 horas. Além disso sabe-se que a probabilidade de qualquer dessas lâmpadas fundir com menos de 500 horas de funcionamento é de 0.001. Considera-se ainda que os tempos de vida de lâmpadas distintas são variáveis aleatórias independentes.

   (a) Num dado equipamento são colocadas 1000 lâmpadas novas daquele tipo para funcionarem simultaneamente. Calcule a probabilidade de haver no máximo uma lâmpada fundida ao fim de 500 horas de utilização. (1.0)

   (b) Numa instalação existe um *stock* de 100 lâmpadas daquelas para usar sucessivamente, uma de cada vez, num único candeeiro que tem de estar sempre ligado. Qual é (aproximadamente) a probabilidade de o *stock* durar mais de 7 anos (considere 2555 dias)? (1.5)

2. Três bolas numeradas de 1 a 3 foram colocadas numa urna. Em seguida retiram-se da urna duas bolas, ao acaso, uma de cada vez e sem reposição. Seja X a variável aleatória que representa o número da primeira bola retirada e Y a variável aleatória que representa o número da segunda bola retirada.

   (a) Determine a função de probabilidade conjunta de (X, Y). (1.0)

   Nota: se não resolveu a alínea (a) considere que $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1, Y = 3) = P(X = 2, Y = 2) = P(X = 3, Y = 1) = P(X = 3, Y = 3) = 1/5$.

   (b) Mostre que X e Y são variáveis aleatórias identicamente distribuídas mas não são independentes. (1.0)

   (c) Calcule $E(X|Y = 1)$. (0.5)

Grupo III *5 valores*

1. Para estimar a probabilidade de sucesso, p, associada a uma experiência de Bernoulli, repete-se a experiência n vezes de forma independente e conta-se o número de sucessos (Y). Considere os seguintes dois estimadores de p: $\hat{P}_1 = Y/n$ e $\hat{P}_2 = (Y+1)/(n+2)$.

   (a) Identifique a distribuição da variável aleatória Y e a partir dela averigue se $\hat{P}_1$ e $\hat{P}_2$ são estimadores centrados de p. (1.0)

   (b) Calcule o erro quadrático médio de $\hat{P}_1$ e o de $\hat{P}_2$. Verifique que o de $\hat{P}_2$ é inferior ao de $\hat{P}_1$ quando $p = 1/2$. (1.5)

2. Com o objectivo de comparar os valores esperados da durabilidade (em anos) de dois tipos de tinta para exteriores (tipo A e tipo B), foram realizadas, de forma independente, 10 medições da durabilidade relativas à tinta do tipo A e 12 relativas à tinta do tipo B, que conduziram aos seguintes valores: $\bar{x}_A = 10.4$, $\bar{x}_B = 9.2$, $s_A^2 = 4.8$, $s_B^2 = 5.6$. De estudos anteriores sabe-se que a variável aleatória X_A, que representa a durabilidade da tinta do tipo A, pode ser razoavelmente descrita por uma distribuição normal, tal como a variável aleatória X_B, que representa a durabilidade da tinta do tipo B, e ainda que as respectivas variâncias têm valores iguais.

   (a) Construa, com base nos elementos fornecidos, um intervalo de confiança a 90% para a diferença entre os valores esperados das durabilidades dos dois tipos de tinta. (2.0)

   (b) Com base no intervalo obtido em (a), o que pode afirmar sobre a igualdade dos dois valores esperados? (0.5)

Grupo IV *5 valores*

1. Uma equipa de médicos acredita que uma pessoa exposta a uma dada doença, por um determinado período de tempo mínimo, tem uma probabilidade 0.5 de contrair tal doença, e que esse acontecimento é independente de pessoa para pessoa. Para confirmar esta teoria os médicos analisaram, em 160 hospitais, registos sobre o pessoal do hospital (médicos, enfermeiros e auxiliares) que esteve exposto a essa doença pelo menos o tempo mínimo considerado, tendo seleccionado aleatoriamente quatro dessas pessoas em cada hospital. De seguida registaram quantas pessoas, nessas quatro, contraíram a doença. Os resultados obtidos foram os seguintes

N.º de pessoas que contraiu a doença	0	1	2	3	4
N.º de observações (hospitais)	12	35	60	45	8

   Será que os dados observados suportam, ao nível de significância de 10%, a conjectura de que a variável aleatória X que representa o número de pessoas que contraíram a doença, em cada quatro pessoas expostas a essa doença, segue uma distribuição binomial com probabilidade de sucesso igual a 0.5? (2.0)

2. Numa dada população de um determinado tipo de animais pretende-se averiguar que tipo de relação existe entre o comprimento de uma fêmea adulta (y, em centímetros) e o comprimento da respectiva progenitora (x, em centímetros). Para isso foram seleccionadas ao acaso 10 fêmeas (progenitoras) com uma descendente fêmea adulta, tendo sido recolhidos os dados seguintes:

x	60	62	64	65	66	67	68	70	72	74
y	64	65	67	65	67	68	67	68	70	69

   Efectuado um resumo dos dados obtiveram-se os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{16} x_i = 668, \quad \sum_{i=1}^{16} y_i = 670, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 44794, \quad \sum_{i=1}^{16} y_i^2 = 44922, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i y_i = 44823$$

   Admita que é válido o modelo de regressão linear simples de Y em X.

   (a) Calcule uma estimativa pontual para o valor esperado de Y quando $x = 68$ cm. (1.0)

   (b) Obtenha, indicando os pressupostos que tiver de assumir em relação ao modelo, um intervalo de confiança a 95% para o declive da recta de regressão. O que pode concluir sobre a significância da regressão? (2.0)