**REVISÃO DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA**

**Carlos Daniel Paulino**

**Regra fundamental da contagem**

Considere-se uma e.a. composta por $k \geq 2$ etapas, em que há $m_i$ resultados possíveis na etapa $i$, $i = 1, \ldots, k$. O número total de resultados da e.a. é $m = \prod_{i=1}^{k} m_i$.

Exemplo: $\epsilon$: Lançamentos sucessivos (um objeto de cada vez) de dois dados e uma moeda (com todas as faces distintas para cada um dos 3 objetos)
$\rightarrow m = 6 \times 6 \times 2 = 72$.

**Sequências ordenadas vs não ordenadas**

Considere-se uma experiência de seleção de $k$ elementos de um conjunto de $n$ elementos. Consoante a ordem de seleção for ou não registada, assim o subconjunto de $k$ elementos diz-se formar uma sequência ordenada ou não ordenada de dimensão $k$.

Tipos possíveis de extração de $k$ elementos de um conjunto de n elementos:

Uma extração simultânea, $k$ extrações simples sucessivas sem e com reposição (só os dois primeiros é que impossibilitam a eventual repetição de elementos nas sequências obtidas).

**Tipos especiais de sequências**

Considere-se uma experiência de obtenção de sequências de $k$ ($k \leq n$) elementos de um conjunto de n elementos distintos.

**Arranjos (simples)** de $n$ elementos tomados $k$ a $k$: sequências de elementos não repetidos que se distinguem umas das outras pelos elementos selecionados ou pela ordem com que o são.

Frequentes em esquemas de extrações simples sucessivas sem reposição. Daí corresponderem a **sequências (amostras) ordenadas sem reposição**.

Número de arranjos: $A_k^n = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

**Arranjos completos** de $n$ elementos tomados $k$ a $k$: sequências de elementos possivelmente repetidos que se distinguem umas das outras pelos elementos selecionados ou pela ordem com que o são.

Frequentes em esquemas de extrações simples sucessivas com reposição. Daí corresponderem a **sequências (amostras) ordenadas com reposição**.

Número de arranjos completos: ${A^*}_k^n = n \times n \times \ldots \times n = n^k$.

**Permutações** de $n$ elementos: arranjos de $n$ elementos tomados $n$ a $n$.

Número de permutações: $P_n = A_n^n = n!$.

**Combinações** de $n$ elementos tomados $k$ a $k$: sequências de elementos não repetidos mas que não se distinguem umas das outras pela ordem em que os $k$ elementos são selecionados, diferindo entre si apenas pelos elementos selecionados.

Frequentes em esquemas de extração simultânea. Daí corresponderem a **sequências (amostras) não ordenadas sem reposição**.

Número de combinações: $C_k^n \equiv \binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

**Permutações de $n$ elementos não todos distintos**:

Considere-se que os $n$ elementos são de $r > 1$ tipos, havendo $k_i$ elementos do tipo $i$ e indistinguíveis entre si (pelo que $n = \sum_{i=1}^r k_i$). O número de permutações possíveis tendo em conta a indistinguibilidade dos elementos de cada tipo é

$$P_n^{k_1,\ldots,k_r} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^r k_i!}.$$

Quando $r = 2$, $P_n^{k_1,k_2} = C_{k_1}^n$.

**Exemplos ilustrativos**:

**1.** Dispondo de 4 peças de pano de cores azul, vermelho, branco e preto, respetivamente, quantas bandeiras tricolores de faixas de pano verticais se podem formar sem repetir as cores? E quantas destas têm a 1ª faixa de cor vermelha?

R: $A_3^4$; $A_2^3$

**2.** Selecione-se ao acaso um grupo de $k$ cidadãos portugueses nascidos em anos comuns. Qual o nº de sequências dos seus dias de aniversário? Quantas destas têm a particularidade de pelo menos 2 cidadãos fazerem anos no mesmo dia?

R: ${A^*}_k^{365}$; ${A^*}_k^{365} - A_k^{365}$

**3.** Supondo que a inspeção sucessiva do funcionamento de 6 máquinas, numeradas de 1 a 6, segue uma ordem completamente arbitrária, de quantas maneiras pode essa inspeção ser feita? Quantas destas correspondem à situação em que as 1ª e 2ª inspecionadas foram as máquinas 1 e 6, respetivamente?

R: $P_6$; $P_4$

**4.** De uma urna com pelo menos uma dezena de bolas de cada uma de várias cores (verde, amarelo, etc.) selecionam-se ao acaso 9 delas. Quantas amostras se podem obter contendo 4 verdes e 3 amarelas? E contendo 4 verdes?

R: $P_9^{4,3,2}$;$C_4^9$.

**Exercícios adicionais**:

**2.6**: Uma lotaria tem 10000 bilhetes numerados de 0000 a 9999. O número do primeiro prémio é o número do bilhete saído numa extração ao acaso.

a) Um jogador comprou um bilhete com o número 6789. Qual a probabilidade de lhe sair o primeiro prémio?

   R: $10^{-4}$

b) Se o jogador comprar todos os bilhetes cujos números têm todos os algarismos iguais, qual a probabilidade de lhe sair o primeiro prémio?

   R: $10^{-3}$

c) Qual a probabilidade de o número premiado ter todos os algarismos diferentes? *(Teste 26 Nov 1994)*

   R: ${A_4}^{10}/10000 = 0.504$

**2.7**: Numa fila de espera de autocarro estão 4 homens, 3 mulheres e 2 crianças. Qual a probabilidade de:

a) As pessoas, dentro de cada um daqueles três grupos, estarem de seguida?

   R: $3! \times 4!3!2!/9! = 4.8 \times 10^{-3}$

b) As 2 crianças estarem juntas?

   R: $8 \times 7!2!/9! = 0.222$

**2.9**: De um grupo de 50 alunos do IST (10 alunos por ano) é escolhida ao acaso uma comissão coordenadora de 4 pessoas. Qual a probabilidade de:

a) Ser escolhido um e um só aluno do 1º ano?

   R: $C_1^{10}C_3^{40}/C_4^{50} = 0.429$

b) Serem escolhidos um aluno (e só um) do 1º ano e um aluno (e só um) do 5º ano?

   R: $C_1^{10}C_1^{10}C_2^{30}/C_4^{50} = 0.189$

c) Serem escolhidos no máximo dois alunos do 1º ano?

R: $\sum_{i=0}^{2} C_i^{10} C_{4-i}^{40} / C_4^{50} = 0.978$

d) Serem todos do mesmo ano?

R: $5 \times C_4^{10} / C_4^{50} = 5 \times 10^{-3}$

**2.10**: Um grupo de apostadores do totobola decidiu jogar todas as apostas possíveis contendo 7 vitórias em casa, 4 empates e 2 vitórias fora. Calcule a probabilidade de esse grupo ganhar o totobola.

R: $P_{13}^{7,4,2} / {A^*}_{13}^{3} = 1.6 \times 10^{-2}$

**2.11**: Suponha que uma cidade tem $n+1$ habitantes e que um deles conta um boato a outro, que por sua vez o repete a um terceiro, e assim sucessivamente. Em cada passo, a pessoa que ouve o boato é escolhida ao acaso de entre as $n$ restantes. Determine a probabilidade de que um boato seja contado $r$ vezes:

a) Sem antes voltar a ser contado à pessoa que lhe deu início.

R: $(\frac{n-1}{n})^{r-1}$

b) Sem que ninguém o ouça mais do que uma vez.

R: $A_r^n / {A^*}_r^n$

---

**CDP, setembro 2013**