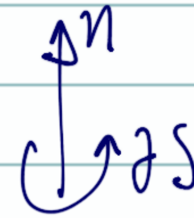
Teorema de STOKES. Exemplos

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n = \oint_{\partial S} F \cdot dg$$



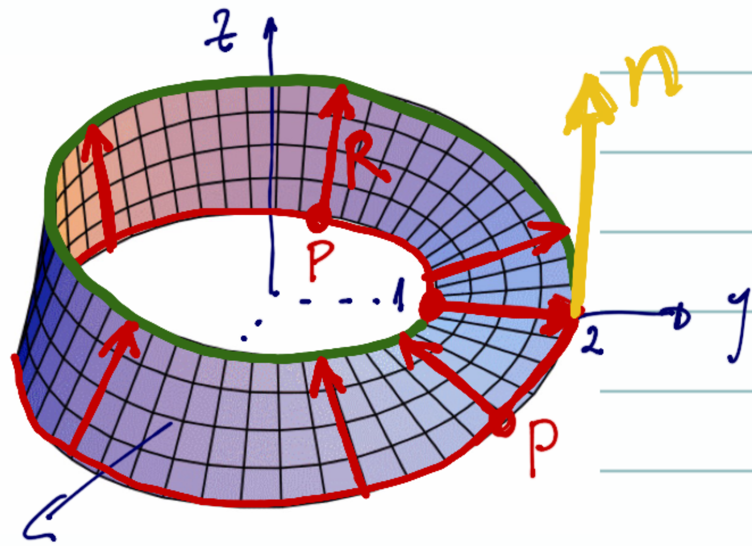
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, C^1, $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície orientável

―――――― " ――――――

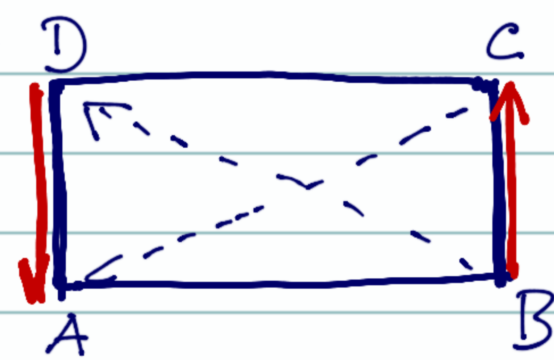
Exemplo de superfície não orientável:

Fita ou banda de Möbius

(1)



(2)



Pode-se construir uma fita de Möbius de duas maneiras.

(1) Considere-se o vector R entre os pontos $P=(0,1,0)$ e $(0,2,0)$.

O ponto P percorre a circunferência de raio 1, centrada na origem no plano $z=0$.

O vector R vai rodando de tal forma que, quando $P=(0,-1,0)$, a outra extremidade é o ponto $(0,-1,1)$.

No final do processo o ponto P será $(0,2,0)$, como se mostra na figura (1).

(2) No rectângulo A,B,C,D identifica-se o ponto A com C e B com D.

De uma forma ou de outra, é claro que a regra da mão direita não funciona nesta superfície.

O vector normal n no ponto $(0,2,0)$,

depois de percorrer a linha verde (extremidade do vector R) estará orientado no sentido oposto ao inicial!!!

Isto quer dizer que o vector normal não é uma função contínua!!!

— // —

Exercício: Parametrizar a fita de Möbius usando dois ângulos como parâmetros. Um que descreve a circunferência de raio 1 percorrida pelo ponto P e outro que descreve a rotação da outra extremidade do vector R.

— // —

Exemplo 1: Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1, z>0\}$ a semiesfera de raio 1 e centro na origem.

Seja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por

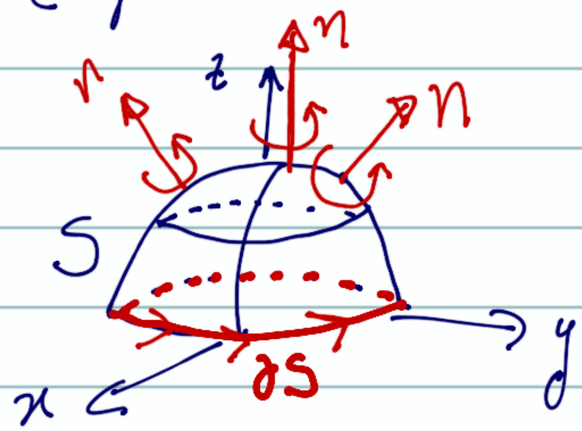
$$F(x,y,z) = (-y, x, z)$$

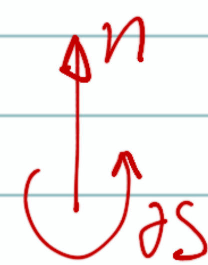
Pretende-se calcular o fluxo do rotacional de F através de S no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o teorema de Stokes.

Resolução:

Stokes: $\underbrace{\iint_S \mathrm{rot}F\cdot n}_{?} = \underbrace{\oint_{\partial S} F\cdot dg}_{\text{a calcular!!!}}$

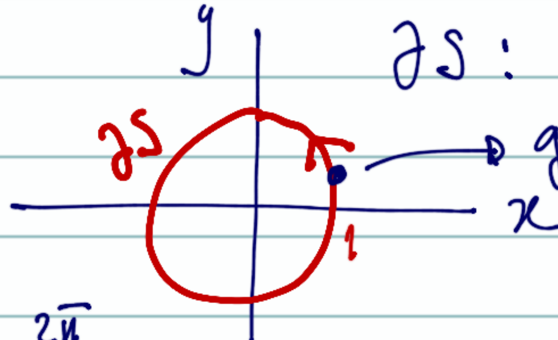
Temos de calcular o trabalho de F ao longo do bordo de S no sentido compatível com o da normal a S (regra da mão direita).





$\iint_S \mathrm{rot}F\cdot n$

|| Stokes



$\partial S:\ z=0,\ x^2+y^2=1$

$\rightarrow g(t)=(\cos t, \mathrm{sen}\, t, 0)$

$0\leq t\leq 2\pi.$

$$\oint_{\partial S} F\cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(t))\cdot g'(t)\,dt =$$

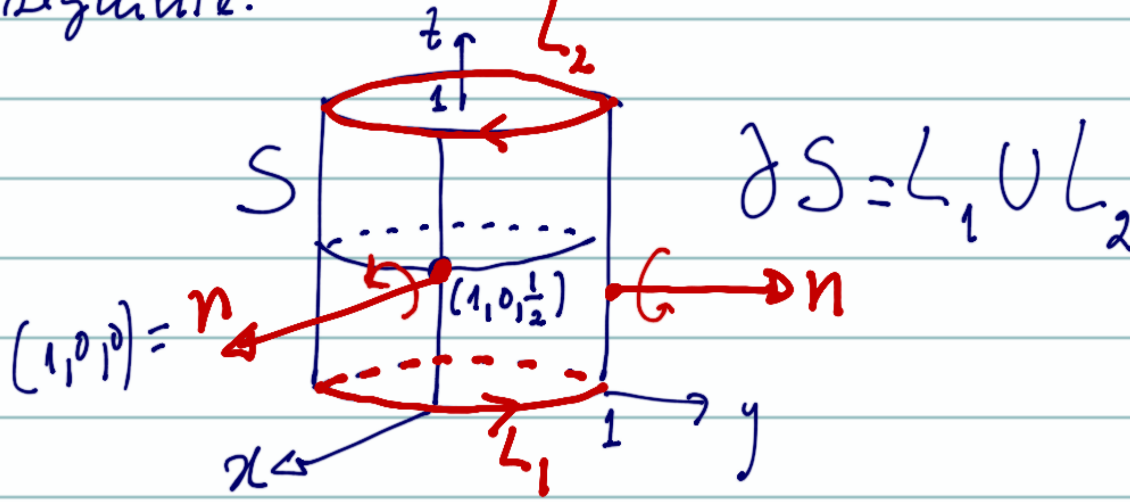
$$= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \ //.$$

—— // ——

<u>**Exemplo 2**</u>: Seja $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1 \ ; \ 0<z<1\}$ e $F(x,y,z) = (-y, x, z)$.

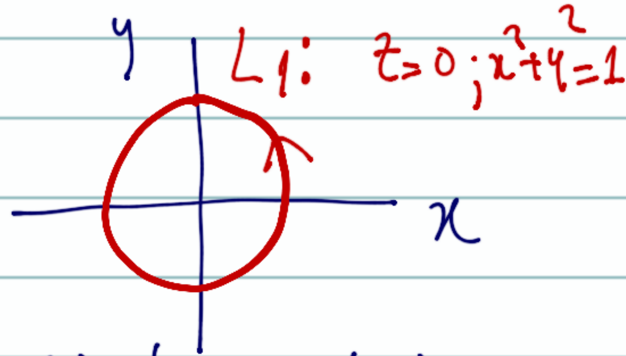
Pretende-se calcular o fluxo do rotacional de F através de S no sentido da normal n tal que no ponto $(1,0,\frac{1}{2}) = (1,0,0)$, tal como se ilustra na figura seguinte.

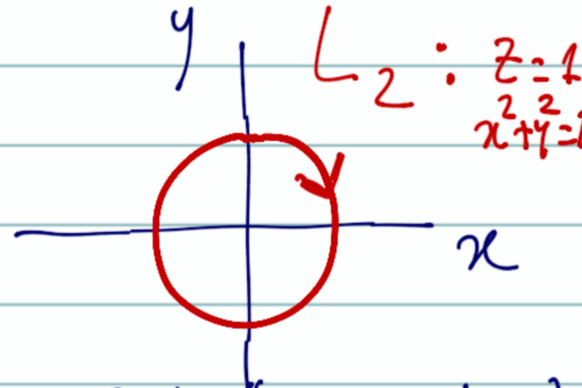


<u>Resolução</u>: Stokes: $\underbrace{\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n}_{?} = \underbrace{\oint_{\partial S} F\cdot dg}_{\text{a calcular}}$

$$\partial S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1;\ z=0\} \cup \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1;\ z=1\}$$

$$= L_1 \cup L_2 .$$





$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$g(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1) \qquad 0 \le t \le 1 .$$

$$F(g(t)) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$$
$$g'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$$

$$F(g(t)) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$$
$$g'(t) = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)$$

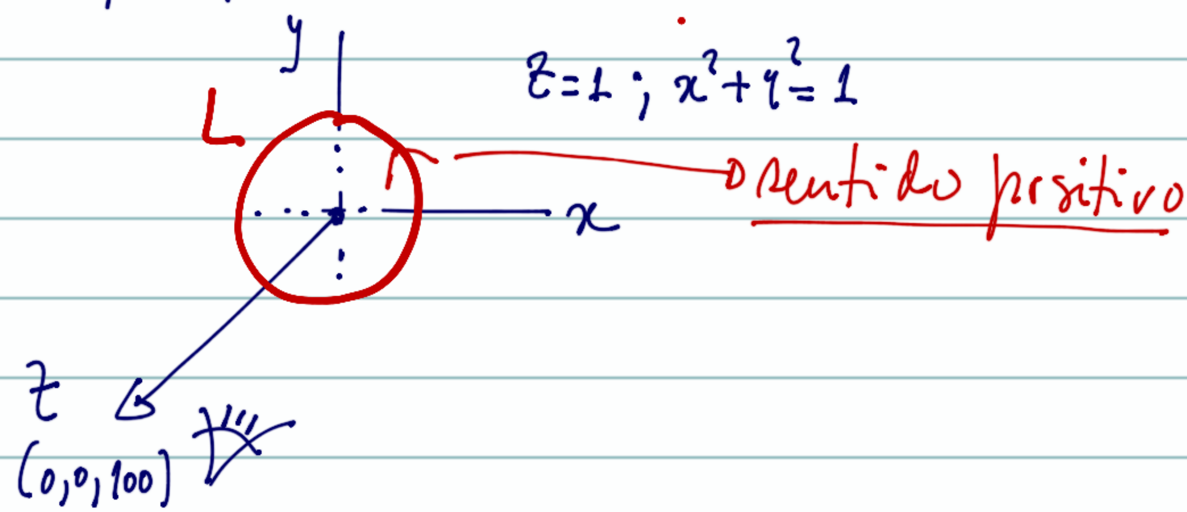
$$\iint_S \operatorname{rot} F\cdot n = \oint_{\partial S} F\cdot dg = \oint_{\substack{L_1 \\ \circlearrowleft}} F\cdot dg + \oint_{\substack{L_2 \\ \circlearrowright}} F\cdot dg$$

$$= \int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} dt = 0 \ //.$$

<u>Exemplo 3</u>: Calcular o trabalho realizado pelo campo vectorial $F(x,y,z) = (-y, x, z)$ ao longo da linha L dada por

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \; ; \; z = 1\}$$

no sentido que positivo quando vista do ponto $(0,0,100)$.



<u>Stokes</u>: $\underbrace{\oint_{\partial S} F \cdot dg}_{?} = \underbrace{\iint_{S} \text{rot}\, F \cdot n}_{\text{a calcular!}}$

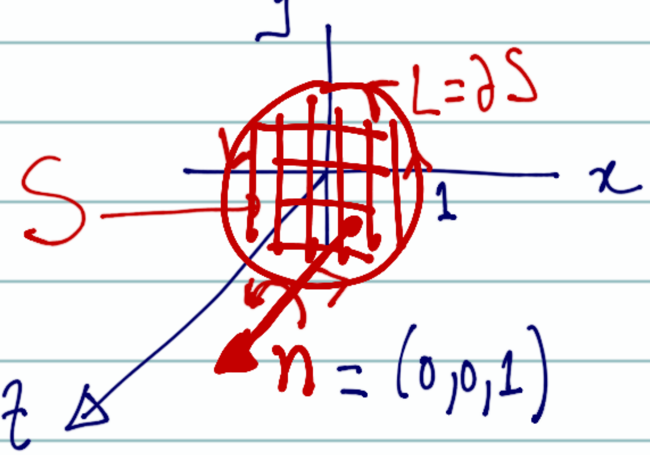
$\boxed{\partial S = L}$

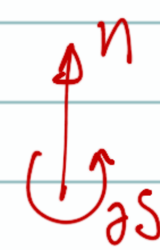
Para usar o teorema de Stokes, a linha L deverá ser o bordo de uma superfície S. Portanto, a partir de L teremos de construir uma superfície S cujo bordo é a linha L.

Note-se que a superfície S deverá ser um conjunto limitado e definido por apenas uma equação.

$L: x^2+y^2=1 \; ; \; z=1$ (2 equações)

$S: x^2+y^2<1 \; ; \; z=1$ (superfície plana) (1 equação)





Sendo S dada pela equação $z=1$, a normal, compatível com o sentido da linha L, deverá ser

$$n=(0,0,1).$$

$$\oint_L F\cdot dg = \oint_{\partial S} F\cdot dg = \iint_S \operatorname{rot} F\cdot n$$

$$\operatorname{rot} F = \text{"}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix}\text{"} = (0,0,2)$$

$$\operatorname{rot} F \cdot n = (0,0,2)\cdot(0,0,1) = 2$$

$$\Rightarrow \oint_L F \cdot dg = \iint_S 2 = 2\, \mathrm{vol}_2(S) = 2\pi \,//.$$

Note-se que S é um círculo de raio 1.