

Exercícios Resolvidos

Limites e Continuidade

Exercício 1 Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^4 + y^2}$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 2y^4}{x^2 + y^2}.$$

Resolução:

a) Note-se que

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2 x}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \right| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

e, portanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

b) Seja $g(x, y) = \frac{x^3}{x^4 + y^2}$. Assim, por um lado temos

$$g(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0, \quad \forall y \neq 0,$$

e, por outro

$$g(x, 0) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Então não existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^4 + y^2}$.

c) Dado que $x^2 + y^2 \geq x^2$ e que $x^2 + y^2 \geq y^2$, teremos

$$\left| \frac{x^3 + 2y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| + 2|y|^2 \leq \|(x, y)\| + 2\|(x, y)\|^2$$

e, portanto, o limite existe e o seu valor é 0.

Exercício 2 Considere a função $f(x, y) = x \log(xy)$.

1. Indique, justificando, em que pontos é que a função f é contínua.
2. Mostre que, sendo S uma recta que passa pela origem e contida no domínio D de f o limite de f na origem relativo ao conjunto S ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S}} f(x, y),$$

existe e com o mesmo valor para toda as rectas nas condições indicadas.

3. Mostre que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. (Sugestão: estude o limite relativo ao subconjunto de D formado pelos pontos que pertencem à linha de equação $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$).

Resolução:

1. A função f é contínua no seu domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, pois a função $g(x, y) = \log xy$ é contínua neste domínio por ser a composta de funções contínuas ($g = \psi \circ \varphi$ onde $\psi(u) = \log u$ e $\varphi(x, y) = xy$) e portanto $f(x, y) = xg(x, y)$ é contínua pois é o produto de funções contínuas.
2. Consideremos as rectas que passam pela origem com declive m e que estão contidas no domínio D de f , ou seja, pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y = mx$, com $m > 0$. O limite de f relativo a estas rectas é dado por

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} x \log(x^2 m) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 m)}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2xm}{x^2 m}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -2x = 0. \end{aligned}$$

3. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=e^{-\frac{1}{x^2}}}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \log(xe^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x \rightarrow 0} x \log x + \lim_{x \rightarrow 0} x \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{1/x} + \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Logo este limite não existe e portanto o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ também não existe.

Exercício 3 Estude a continuidade da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Resolução: Usando o critério das sucessões é claro que a função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Resta analisar a continuidade de f na origem. Para isso, consideremos o eixo das abscissas, ou seja, o conjunto de pontos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Neste conjunto temos

$$f(x, 0) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|},$$

ou seja,

$$f(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

e, sendo $f(0, 0) = 0$, concluímos que a função f não é contínua na origem.

Exercício 4 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin(x^2 + y^2).$$

Mostre que f é prolongável por continuidade a $(0, 0)$ e, sendo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o seu prolongamento, determine $F(0, 0)$.

Resolução: Notamos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1,$$

logo para mostrar que f é prolongável por continuidade à origem, basta mostrar que o seguinte limite existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Dado que $x^2 \leq x^2 + y^2$ temos

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) |y|}{x^2 + y^2} = |y| \leq \|(x, y)\|,$$

portanto o limite existe e é igual a 0. Concluímos que o prolongamento de f é dado por

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$