

Teorema da Divergência e Teorema de Stokes (Resolução Sumária)

3 de Maio de 2013

1. Calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ para fora da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + 2z^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

(a) Pela definição.

Resolução: Uma parametrização de S é por exemplo $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, z) = \left(\sqrt{1 + 2z^2} \cos \theta, \sqrt{1 + 2z^2} \sin \theta, z \right),$$

uma vez que em coordenadas cilíndricas a equação que define S se escreve $r^2 = 1 + 2z^2$.
Uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sqrt{1 + 2z^2} \sin \theta & \sqrt{1 + 2z^2} \cos \theta & 0 \\ 2z(1 + 2z^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta & 2z(1 + 2z^2)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\sqrt{1 + 2z^2} \cos \theta, \sqrt{1 + 2z^2} \sin \theta, -2z \right) \end{aligned}$$

aponta para fora de S , concluímos que \mathbf{g} induz a orientação correspondente à normal exterior unitária, e que portanto o fluxo de \mathbf{F} para fora de S pode ser calculado a partir de

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 &= \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1 + 2z^2} \cos \theta, \sqrt{1 + 2z^2} \sin \theta, -2z \right) \cdot \left(\sqrt{1 + 2z^2} \cos \theta, \sqrt{1 + 2z^2} \sin \theta, -2z \right) d\theta dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + 2z^2 + 4z^2) d\theta dz = 6\pi. \end{aligned}$$

(b) Usando o Teorema da Divergência.

Resolução: É fácil ver que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. A superfície S é um pedaço de um hiperbolóide cujo eixo é o eixo dos zz , e o seu bordo é constituído por uma circunferência C_1 de raio 1 contida no plano $z = 0$ e uma circunferência C_2 de raio $\sqrt{3}$ contida no plano $z = 1$. Para aplicar o Teorema da Divergência (que só pode ser aplicado a superfícies

que limitam volumes), adicionamos a S os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $z = 0$ e $z = 1$ e cujos bordos são C_1 e C_2 . A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior \mathbf{n} ao volume V limitado por $D_1 \cup S \cup D_2$. Note-se que, em D_1 , $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ e, em D_2 , $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x, y, 0) = (x, y, 0)$ e $\mathbf{F}(x, y, 1) = (x, y, -2)$. Pelo Teorema da Divergência tem-se então

$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV_3 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 &= - \int_{D_1} 0 dV_2 - \int_{D_2} (-2) dV_2 \\ &= 2V_2(D_2). \end{aligned}$$

Como D_2 é um círculo de raio $\sqrt{3}$, $V_2(D_2) = 3\pi$, e portanto

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = 6\pi,$$

em conformidade com o nosso cálculo anterior.

(c) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais.

Resolução: Note-se que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Como \mathbf{F} está definido em \mathbb{R}^3 , que é um conjunto em estrela, concluímos que \mathbf{F} é um campo rotacional. Se \mathbf{A} é um potencial vector para \mathbf{F} então devemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -2z \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_3 = 0$. Então obtém-se

$$\begin{cases} -\frac{\partial A_2}{\partial z} = x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = -xz + f(x, y) \\ A_1 = yz + g(x, y) \\ -z + \frac{\partial f}{\partial x} - z - \frac{\partial g}{\partial y} = -2z \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f = g = 0$, e um potencial vector para \mathbf{F} é então

$$\mathbf{A} = (yz, -xz, 0).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária \mathbf{n} . Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo

positivo dos zz , e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é $\mathbf{g}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, e portanto

$$\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} = \int_0^{2\pi} (0, 0, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta = 0.$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = (\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta, 1)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário àquele que pretendemos, pelo que

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= - \int_0^{2\pi} (\sqrt{3} \sin \theta, -\sqrt{3} \cos \theta, 0) \cdot (-\sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 3 d\theta = 6\pi. \end{aligned}$$

Portanto mais uma vez concluímos que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = 6\pi.$$

2. Considere a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1, 0 < z < 1 \right\}.$$

(a) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + \cos(yz), y + e^{x^2+z^2}, z + 1)$ através da superfície S , no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

Resolução: Apesar do campo \mathbf{F} ser algo complicado, é fácil ver que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$. Portanto será conveniente usar o Teorema da Divergência. A superfície S é um pedaço de um cone cujo eixo é o eixo dos zz , e o seu bordo é constituído por uma circunferência C_1 de raio 1 contida no plano $z = 0$ e uma circunferência C_2 de raio 2 contida no plano $z = 1$. Para aplicar o Teorema da Divergência (que só pode ser aplicado a superfícies que limitam volumes), adicionamos a S os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $z = 0$ e $z = 1$ e cujos bordos são C_1 e C_2 . A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior \mathbf{n} ao volume V limitado por $D_1 \cup S \cup D_2$. Note-se que, em D_1 , $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ e, em D_2 , $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x, y, 0) = (x + 1, y + e^{x^2}, 1)$ e $\mathbf{F}(x, y, 1) = (x + \cos y, y + e^{x^2+1}, 2)$. Pelo Teorema da Divergência tem-se então

$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV_3,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 &= \int_V 3 dV_3 - \int_{D_1} (-1) dV_2 - \int_{D_2} 2 dV_2 \\ &= 3V_3(V) + V_2(D_1) - 2V_2(D_2). \end{aligned}$$

Como D_1 e D_2 são círculos de raios 1 e 2, $V_2(D_1) = \pi$ e $V_2(D_2) = 4\pi$. Por outro lado,

$$V_3(V) = \int_0^1 \int_0^{z+1} \int_0^{2\pi} r d\theta dr dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{z+1} dz = \frac{7\pi}{3}.$$

Logo,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = 3 \cdot \frac{7\pi}{3} + \pi - 2 \cdot 4\pi = 0.$$

- (b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{G}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ através de S , no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

Resolução: Note-se que $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. Como \mathbf{G} está definido em \mathbb{R}^3 , que é um conjunto em estrela, concluímos que \mathbf{G} é um campo rotacional. Se \mathbf{A} é um potencial vector para \mathbf{G} , i.e., se $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{A}$, então devemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = x + z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = x + y \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_2 = 0$. Então obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} = y + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = x + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial y} = -x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 = \frac{y^2}{2} + zy + f(x, z) \\ \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = x + z \\ A_1 = -xy - \frac{y^2}{2} + g(x, z) \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f(x, z) = 0$ e $g(x, z) = xz + \frac{z^2}{2}$. Um potencial vector para \mathbf{G} é então

$$\mathbf{A} = \left(xz + \frac{z^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}, 0, \frac{y^2}{2} + zy \right).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dV_2 = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária \mathbf{n} . Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos zz , e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é $\mathbf{g}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, e portanto

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin \theta \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2}, 0, \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^3 \theta \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 1)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário àquele que pretendemos, pelo

que

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(2 \cos \theta + \frac{1}{2} - 2 \operatorname{sen}^2 \theta - 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta, 0, 2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \right) \cdot (-2 \operatorname{sen} \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} (-4 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{sen}^3 \theta + 8 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dV_2 = 0.$$