

## Integrais de Linha e de Superfície (Resolução Sumária)

3 de Maio de 2013

1. Calcule a área da superfície curva de um cone circular recto de altura  $h > 0$  e raio da base  $a > 0$ .

**Resolução:** Uma parametrização desta superfície é por exemplo  $\mathbf{g} : ]0, a[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{g}(r, \theta) = \left( r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{h}{a} r \right).$$

O elemento de área correspondente a esta parametrização é

$$\sqrt{\det G(r, \theta)},$$

onde  $G$  é a matriz  $2 \times 2$  dada por

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} = \left( \cos \theta, \sin \theta, \frac{h}{a} \right) \cdot \left( \cos \theta, \sin \theta, \frac{h}{a} \right) = 1 + \frac{h^2}{a^2}; \\ G_{12} &= G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = \left( \cos \theta, \sin \theta, \frac{h}{a} \right) \cdot (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) = 0; \\ G_{22} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \cdot (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) = r^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\det G(r, \theta) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{h^2}{a^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2 \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$$

e a área da superfície é

$$\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \int_0^a \int_0^{2\pi} r d\theta dr = 2\pi \frac{a^2}{2} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} = \pi a \sqrt{a^2 + h^2}.$$

2. Escreva a área do elipsóide de semieixos  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  como um integral iterado.

**Resolução:** Uma parametrização desta superfície é por exemplo  $\mathbf{g} : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (a \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, c \cos \theta).$$

O elemento de área correspondente a esta parametrização é

$$\sqrt{\det G(\theta, \varphi)},$$

onde  $G$  é a matriz  $2 \times 2$  dada por

$$G_{11} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (a \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -c \sin \theta) \cdot (a \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -c \sin \theta) \\ = a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + c^2 \sin^2 \theta;$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} = (a \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -c \sin \theta) \cdot (-a \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ = (b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$G_{22} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} = (-a \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0) \cdot (-a \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ = a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi.$$

Portanto

$$\det G(r, \theta) = \begin{vmatrix} a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + c^2 \sin^2 \theta & (b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ (b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi & a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \end{vmatrix} \\ = a^2 b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a^2 c^2 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + b^2 c^2 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi$$

e a área da superfície é

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \sqrt{a^2 b^2 \cos^2 \theta + a^2 c^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + b^2 c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} d\varphi d\theta.$$

3. Prove o Segundo Teorema de Pappus: a área de uma superfície de revolução gerada por uma curva plana é igual a  $2\pi dL$ , onde  $L$  é o comprimento da curva plana e  $d$  é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular a área da superfície do toro

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2 \right\}$$

( $0 < r < R$ ).

**Resolução:** Se a curva é parametrizada por  $\mathbf{c} : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t))$$

uma parametrização da superfície de revolução gerada pela curva é  $\mathbf{g} : ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{g}(t, \varphi) = (u(t) \cos \theta, u(t) \sin \theta, v(t)).$$

O elemento de área correspondente a esta parametrização é

$$\sqrt{\det G(t, \theta)},$$

onde  $G$  é a matriz  $2 \times 2$  dada por

$$G_{11} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = (u' \cos \theta, u' \sin \theta, v') \cdot (u' \cos \theta, u' \sin \theta, v') = (u')^2 + (v')^2;$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (u' \cos \theta, u' \sin \theta, v') \cdot (-u \sin \theta, u \cos \theta, 0) = 0;$$

$$G_{22} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (-u \sin \theta, u \cos \theta, 0) \cdot (-u \sin \theta, u \cos \theta, 0) = u^2.$$

Portanto

$$\det G(r, \theta) = \begin{vmatrix} (u')^2 + (v')^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{vmatrix} = u^2 ((u')^2 + (v')^2)$$

e a área da superfície é

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} u \sqrt{(u')^2 + (v')^2} d\theta dt = 2\pi \int_0^1 u \sqrt{(u')^2 + (v')^2} dt.$$

Ora o elemento de comprimento correspondente à parametrização  $\mathbf{c}$  é

$$\sqrt{\frac{d\mathbf{c}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{c}}{dt}} = \sqrt{(u')^2 + (v')^2}$$

e a coordenada  $u$  do seu centróide é portanto

$$u_C = d = \frac{1}{L} \int_0^1 u \sqrt{(u')^2 + (v')^2} dt.$$

Concluimos que a área da superfície é  $2\pi dL$ . No caso do toro,  $d = R$  e  $L = 2\pi r$ , pelo que a área da superfície do toro é  $4\pi^2 rR$ . É também fácil ver que a superfície cónica do exercício 1 se pode obter por rotação do segmento de recta unindo os pontos  $(0, 0)$  e  $(a, h)$ , pelo que  $d = \frac{a}{2}$  e  $L = \sqrt{a^2 + h^2}$ , vindo a área do cone  $2\pi \frac{a}{2} \sqrt{a^2 + h^2}$  (em conformidade com o que já havíamos obtido).

4. Seja  $S$  a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1\}.$$

Calcule:

(a) A área de  $S$ ;

**Resolução:** Uma parametrização desta superfície é por exemplo  $\mathbf{g} : ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2).$$

O elemento de área correspondente a esta parametrização é

$$\sqrt{\det G(r, \theta)},$$

onde  $G$  é a matriz  $2 \times 2$  dada por

$$G_{11} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 2r) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 2r) = 1 + 4r^2;$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (\cos \theta, \sin \theta, 2r) \cdot (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) = 0;$$

$$G_{22} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \cdot (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) = r^2.$$

Portanto

$$\det G(r, \theta) = \begin{vmatrix} 1 + 4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2 (1 + 4r^2)$$

e a área da superfície é

$$V_2(S) = \int_S 1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sqrt{1+4r^2} d\theta dr = 2\pi \left[ \frac{1}{12} (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1).$$

(b) O centróide de  $S$ .

**Resolução:** Por simetria o centróide situa-se no eixo dos  $zz$ , i.e.,  $x_C = y_C = 0$ . Como

$$\begin{aligned} \int_S z &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \sqrt{1+4r^2} d\theta dr = 2\pi \int_0^1 u \sqrt{1+4u} \frac{du}{2} \\ &= \pi \left[ u \frac{1}{6} (1+4u)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \pi \int_0^1 \frac{1}{6} (1+4u)^{\frac{3}{2}} du = \frac{\pi}{6} 5^{\frac{3}{2}} - \pi \left[ \frac{1}{60} (1+4u)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} 5^{\frac{3}{2}} - \pi \frac{1}{60} (5)^{\frac{5}{2}} + \pi \frac{1}{60} = \frac{\pi}{12} 5^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{60} \end{aligned}$$

temos

$$z_C = \frac{1}{V_2(S)} \int_S z = \frac{\frac{\pi}{12} 5^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{60}}{\frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1)} = \frac{\frac{1}{2} 5^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{10}}{5^{\frac{3}{2}} - 1}.$$

5. Calcule o trabalho realizado pela força

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

ao longo da curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 2\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

percorrida no sentido dos valores de  $z$  decrescentes.

**Resolução:** Uma parametrização desta curva é por exemplo  $g : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$g(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 2\theta),$$

que no entanto corresponde à orientação inversa da pretendida. O integral de linha de  $\mathbf{F}$  ao longo da curva com esta orientação é

$$\begin{aligned} &\int_C (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin \theta + 2\theta, \cos \theta + 2\theta, \cos \theta + \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 2) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 \theta - 2\theta \sin \theta + \cos^2 \theta + 2\theta \cos \theta + 2 \cos \theta + 2 \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta + [2\theta \cos \theta + 2\theta \sin \theta]_0^{2\pi} = 4\pi, \end{aligned}$$

pelo que o trabalho realizado é então  $-4\pi$ .

6. O campo de velocidades de um fluido é descrito pelo campo vectorial

$$\mathbf{v} = (x, y, -2z).$$

Supondo que o fluido possui densidade constante igual a 1, calcule a massa de fluido que atravessa a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

por unidade de tempo no sentido dos valores de  $z$  decrescentes.

**Resolução:** Uma parametrização de  $S$  é por exemplo  $\mathbf{g} : ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2 \sin \theta \cos \theta).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 2r \sin \theta \cos \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{vmatrix} \\ &= (-r^2 \sin \theta, -r^2 \cos \theta, r) \end{aligned}$$

aponta para cima, concluímos que o fluxo de  $\mathbf{v}$  no sentido dos valores de  $z$  decrescentes é

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= \\ &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r \cos \theta, r \sin \theta, -2r^2 \sin \theta \cos \theta) \cdot (-r^2 \sin \theta, -r^2 \cos \theta, r) d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4r^3 \sin \theta \cos \theta d\theta dr = 0. \end{aligned}$$