

## Teorema de Fubini e Mudança de Variáveis (Resolução Sumária)

3 de Maio de 2013

1. Escreva  $\int_A f dV_2$  como um integral iterado nas duas ordens de integração possíveis, onde o conjunto  $A$  é:

(a) O triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(2, 1)$ ;

**Resolução:**

$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{x-1}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{2y}^{y+1} f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

(b) O sector circular com centro em  $(0, 0)$  e cujo arco é o menor arco circular unindo os pontos  $(1, 1)$  e  $(1, -1)$ ;

**Resolução:**

$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 &= \int_0^1 \int_{-x}^x f(x, y) dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{|y|}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

(c) A região compreendida entre as circunferências de raios 1 e 2 centradas na origem.

**Resolução:**

$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 &= \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx\end{aligned}$$

(a outra ordem de integração é completamente análoga).

2. Escreva  $\int_A f dV_3$  como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha, onde o conjunto  $A$  é:

(a) O tetraedro limitado pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y + z = 1$ ;

**Resolução:** Por exemplo,

$$\int_A f dV_3 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz dy dx.$$

(b) A esfera  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ ;

**Resolução:** Por exemplo,

$$\int_A f dV_3 = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx.$$

(c) O cone  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ .

**Resolução:** Por exemplo,

$$\int_A f dV_3 = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz dy dx.$$

3. Escreva o volume do sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha.

**Resolução:** Por exemplo,

$$\begin{aligned} V_3(A) &= \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz. \end{aligned}$$

4. Inverta a ordem de integração nos seguintes integrais iterados:

(a)  $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy dx;$

**Resolução:**  $\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y) dx dy.$

(b)  $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy dx;$

**Resolução:**  $\int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx dy + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^1 f(x, y) dx dy.$

(c)  $\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy dx;$

**Resolução:**

$$\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{4}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\frac{y^2}{4}}^2 f(x, y) dx dy$$

5. Calcule o volume de um cone circular recto de altura  $h > 0$  e raio da base  $a > 0$ .

**Resolução:** Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$ , o cone pode ser descrito por  $\frac{h}{a}\rho \leq z \leq h$ , e portanto o seu volume é dado por

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{a}\rho}^h \rho dz d\varphi d\rho = 2\pi \int_0^a \left( h\rho - \frac{h}{a}\rho^2 \right) d\rho = \pi ha^2 - \frac{2\pi ha^2}{3} = \frac{\pi a^2 h}{3}.$$

6. Uma esfera de raio 2 é perfurada por uma broca de raio 1. Determine o volume do sólido resultante.

**Resolução:** Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$ , a esfera pode ser descrita por  $\rho^2 + z^2 \leq 4$ , e a broca por  $\rho \leq 1$ . A intersecção das superfícies de ambos ocorre para  $z^2 = 3$ , e portanto o volume do sólido resultante será

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \rho d\rho d\varphi dz = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4-z^2-1}{2} dz = 4\pi\sqrt{3}.$$

7. Seja  $A$  o elipsóide

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

(a) Calcule o volume de  $A$ .

**Resolução:** Em termos das variáveis  $(u, v, w)$  definidas na sugestão, o conjunto  $A$  é descrito por  $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ , i.e., é uma esfera de raio 1. Uma vez que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc,$$

pelo teorema da mudança de variável temos

$$V_3(A) = \int_{\{u^2+v^2+w^2 \leq 1\}} abc \, dudvdw = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{4\pi abc}{3}.$$

(b) Supondo que  $A$  possui densidade constante igual a 1, calcule o momento de inércia do elipsóide em relação ao eixo dos  $zz$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned} I_z(A) &= \int_{\{u^2+v^2+w^2 \leq 1\}} (a^2 u^2 + b^2 v^2) abc \, dudvdw \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) abc r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{5} \pi abc \int_0^\pi (a^2 + b^2)(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{15} abc(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

**Sugestão:** Utilize a mudança de variável  $(x, y, z) = (au, bv, cw)$ .

8. Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é mensurável e com medida finita, uma *pirâmide* de base  $A$  e vértice  $he_{n+1}$  é o conjunto

$$P = \{(a^1(1-t), \dots, a^n(1-t), ht) \in \mathbb{R}^{n+1} : (a^1, \dots, a^n) \in A, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Prove que

$$V_{n+1}(P) = \frac{h}{n+1} V_n(A).$$

Aproveite este resultado para confirmar a fórmula da área do triângulo e o resultado que obteve na questão 5. (**Sugestão:** Utilize a mudança de variável  $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = (a^1(1-t), \dots, a^n(1-t), ht)$ ).

**Resolução:** Em termos das variáveis  $(a^1, \dots, a^n, t)$  definidas na sugestão, a pirâmide  $P$  é dada por  $A \times [0, 1]$ . Uma vez que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial a^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial a^n} & \frac{\partial x^1}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial a^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial a^n} & \frac{\partial x^n}{\partial t} \\ \frac{\partial x^{n+1}}{\partial a^1} & \dots & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial a^n} & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial t} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-t & \dots & 0 & -a^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1-t & -a^n \\ 0 & \dots & 0 & h \end{bmatrix} = (1-t)^n h,$$

pelo teorema da mudança de variável temos

$$V_{n+1}(P) = \int_A \int_0^1 h(1-t)^n dt dV_n = hV_n(A) \left[ -\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{h}{n+1} V_n(A).$$

9. Prove o Teorema de Pappus: o volume de um sólido de revolução gerado por uma figura plana é igual a  $2\pi dA$ , onde  $A$  é a área da figura plana e  $d$  é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular o volume do toro

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2 \right\}$$

( $0 < r < R$ ).

**Resolução:** Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$ , o volume do sólido de revolução é dado por

$$V = \int_0^{2\pi} \iint_{\text{figura}} \rho d\rho dz d\varphi = 2\pi dA,$$

uma vez que por definição

$$d = \frac{1}{A} \iint_{\text{figura}} \rho d\rho dz.$$

Consequentemente, o volume do toro é  $2\pi R(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$ .

10. Seja  $A$  o sólido

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq x \leq y \right\}$$

e densidade  $\rho(x, y, z) = z$ . Calcule:

(a) O volume de  $A$ ;

**Resolução:** Em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , o volume do sólido é dado por

$$V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{12} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(b) A massa de  $A$ ;

**Resolução:** Nas mesmas coordenadas, e uma vez que a densidade é  $z = r \cos \theta$ ,

$$M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{64}.$$

(c) O centróide de  $A$ ;

**Resolução:** Uma vez que  $x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$ , a coordenada  $x_C$  do centróide é dada por

$$x_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{16} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right),$$

ou seja,

$$x_C = \frac{3(\pi - 2)(\sqrt{2} + 1)}{8\pi}.$$

Analogamente, uma vez que  $y = r \operatorname{sen} \theta \sin \varphi$ , a coordenada  $y_C$  do centróide é dada por

$$y_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \operatorname{sen} \theta \sin \varphi r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{32},$$

ou seja,

$$y_C = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{8\pi}.$$

Finalmente, uma vez que  $z = r \cos \theta$ , a coordenada  $z_C$  do centróide é dada por

$$z_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = M,$$

ou seja,

$$z_C = \frac{M}{V} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{16}$$

(d) O centro de massa de  $A$ ;

**Resolução:** Uma vez que  $x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$ , a coordenada  $x_{CM}$  do centro de massa é dada por

$$x_{CM} M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi r \cos \theta r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = \frac{1}{60},$$

ou seja,

$$x_{CM} = \frac{16}{15\pi}.$$

Analogamente, uma vez que  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ , a coordenada  $y_{CM}$  do centro de massa é dada por

$$y_{CM}M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin \theta \sin \varphi r \cos \theta r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{60} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

ou seja,

$$y_{CM} = \frac{16}{15\pi} \left( \sqrt{2} - 1 \right).$$

Finalmente, uma vez que  $z = r \cos \theta$ , a coordenada  $z_{CM}$  do centro de massa é dada por

$$z_{CM}M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta r \cos \theta r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{60} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right),$$

ou seja,

$$z_{CM} = \frac{16}{15} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

(e) O momento de inércia de  $A$  em relação ao eixo dos  $zz$ .

**Resolução:** Uma vez que o quadrado da distância ao eixo dos  $zz$  é dado por

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta,$$

o momento de inércia pedido é

$$I_z = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin^2 \theta r \cos \theta r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{96}.$$