

# Variedades e Extremos Condicionados (Resolução Sumária)

3 de Maio de 2013

1. Mostre que os seguintes conjuntos são variedades e indique a respectiva dimensão:

(a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ ;

**Resolução:** O conjunto é  $F^{-1}(0)$ , onde

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1.$$

Uma vez que

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$$

só não tem característica máxima (i.e., 1) no ponto  $(0, 0, 0)$ , que não pertence a  $F^{-1}(0)$  (porque  $F(0, 0, 0) = -1$ ), vemos que cada ponto de  $F^{-1}(0)$  possui uma vizinhança na qual a característica de  $DF$  é máxima. Portanto  $F^{-1}(0)$  é uma variedade de dimensão  $3 - 1 = 2$ .

(b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = x + y + z = 1\}$ ;

**Resolução:** O conjunto é  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ , onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1, x + y + z - 1).$$

Uma vez que

$$D\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

só não tem característica máxima (i.e., 2) quando  $x = y = 0$ , e visto que os pontos desta forma não pertencem a  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$  (porque  $\mathbf{F}(0, 0, z) = (-1, z + 1)$ ), vemos que cada ponto de  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$  possui uma vizinhança na qual a característica de  $D\mathbf{F}$  é máxima. Portanto  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$  é uma variedade de dimensão  $3 - 2 = 1$ .

(c)  $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$ .

**Resolução:** Basta notar que este conjunto é o gráfico da função  $C^\infty f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$f(x, y) = \left( e^{x^2+y^2}, \cos(xy) \right).$$

Portanto o conjunto é uma variedade de dimensão 2.

2. Calcule o espaço tangente e o espaço normal a cada uma das variedades seguintes nos pontos indicados:

(a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ , em  $(1, 0, 0)$ ;

**Resolução:** Olhando para a linha da matriz Jacobiana da função  $F$  calculada no exercício anterior, sabemos que o espaço normal será dado por

$$T_{(1,0,0)}^\perp M = \text{span}\{(2, 0, 0)\} = \text{span}\{(1, 0, 0)\},$$

onde  $M$  designa a variedade. Logo

$$T_{(1,0,0)} M = \text{span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

(b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = x + y + z = 1\}$ , em  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$ ;

**Resolução:** Olhando para as linhas da matriz Jacobiana da função  $F$  calculada no exercício anterior, sabemos que o espaço normal será dado por

$$T_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})}^\perp M = \text{span}\{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), (1, 1, 1)\} = \text{span}\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\},$$

onde  $M$  designa a variedade. Logo

$$\begin{aligned} T_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})} M &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = a + b + c = 0\} = \\ &= \{(a, -a, 0) : a \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, -1, 0)\}. \end{aligned}$$

(c)  $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$ , em  $(0, 0, 1, 1)$ .

**Resolução:** Podemos escrever o conjunto como  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ , onde

$$\mathbf{F}(x, y, z, w) = (z - e^{x^2+y^2}, w - \cos(xy)).$$

Uma vez que

$$D\mathbf{F}(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} -2xe^{x^2+y^2} & -2ye^{x^2+y^2} & 1 & 0 \\ y \text{sen}(xy) & x \text{sen}(xy) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vemos que o espaço normal será dado por

$$T_{(0,0,1,1)}^\perp M = \text{span}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

onde  $M$  designa a variedade. Logo

$$T_{(0,0,1,1)} M = \text{span}\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}.$$

3. Escreva a equação do plano ortogonal à curva

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, 3x + 4y - 5z = 0\}$$

no ponto  $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$ .

**Resolução:** A curva é dada por  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ , onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 1, 3x + 4y - 5z).$$

Uma vez que

$$D\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix},$$

o espaço normal será dado por

$$T_{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)}^\perp M = \text{span}\left\{\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}, 0\right), (3, 4, -5)\right\} = \text{span}\{(4, -3, 0), (3, 4, -5)\},$$

onde  $M$  designa a curva. O espaço tangente será então dado por

$$\begin{aligned} T_{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)} M &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 4a - 3b = 3a + 4b - 5c = 0\} = \\ &= \left\{\left(a, \frac{4}{3}a, \frac{5}{3}a\right) : a \in \mathbb{R}\right\} = \text{span}\{(3, 4, 5)\}, \end{aligned}$$

e portanto o vector  $(3, 4, 5)$  será ortogonal ao plano pedido. Consequentemente, a equação deste plano deverá ser

$$3x + 4y + 5z = d$$

para algum  $d \in \mathbb{R}$ . Uma vez que o ponto  $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)$  tem que satisfazer a equação do plano, concluímos que  $d = 0$ , e portanto a equação é

$$3x + 4y + 5z = 0.$$

4. Escreva 4 como uma soma de 4 números reais positivos cujo produto seja máximo.

Queremos maximizar a função

$$f(x, y, z, w) = xyzw$$

sob a restrição

$$x + y + z + w = 4.$$

De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y, z, w) = xyzw + \lambda(x + y + z + w - 4).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (yzw + \lambda, xzw + \lambda, xyw + \lambda, xyz + \lambda),$$

os possíveis pontos de máximo deverão satisfazer

$$\begin{cases} yzw + \lambda = 0 \\ xzw + \lambda = 0 \\ xyw + \lambda = 0 \\ xyz + \lambda = 0 \\ x + y + z + w = 4 \end{cases}$$

Se alguma das variáveis for zero, o produto será zero e portanto não será máximo; assumindo  $xyzw \neq 0$ , teremos  $\lambda \neq 0$  e portanto dividindo as quatro primeiras equações membro a membro obtém-se  $x = y = z = w$ , e da última equação vem  $x = y = z = w = 1$ .

A região do hiperplano  $x + y + z + w = 4$  na qual  $x, y, z, w \geq 0$  é compacta. Portanto sabemos que o máximo da função  $f$  naquela região existe; logo, tem que ser o ponto  $(1, 1, 1, 1)$ .

5. Que dimensões deverá ter uma caixa rectangular de volume  $V$ , aberta numa das faces, por forma a que a área da sua superfície seja mínima?

**Resolução:** Sejam  $x, y, z > 0$  as dimensões da caixa. O volume da caixa será

$$V = xyz.$$

Supondo que a face aberta é a face de lados  $x, y$ , vemos que a área da caixa será

$$A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$

O problema é minimizar a função  $A$  sob a restrição  $xyz = V$ . De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (y + 2z + \lambda yz, x + 2z + \lambda xz, 2x + 2y + \lambda xy),$$

os possíveis pontos de mínimo deverão satisfazer

$$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} + 2\frac{1}{y} + \lambda = 0 \\ \frac{1}{z} + 2\frac{1}{x} + \lambda = 0 \\ 2\frac{1}{y} + 2\frac{1}{x} + \lambda = 0 \\ xyz = V \end{cases}$$

e portanto  $x = y = 2z$ , donde  $z = \left(\frac{V}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ . Por outras palavras, a caixa deverá ter base quadrada e altura igual a metade do lado do quadrado.

6. Determine o comprimento dos semieixos da elipse de equação  $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$  (**Sugestão:** Recorde que os eixos de uma elipse a intersectam nos pontos em que a distância ao centro é máxima/mínima).

**Resolução:** De acordo com a sugestão, basta achar os extremos (do quadrado) da distância ao centro da elipse. Uma vez que a elipse é claramente simétrica em relação à origem (se  $(x, y)$  satisfaz a equação então  $(-x, -y)$  também a satisfaz), devemos então encontrar os extremos da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sob a restrição

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (2x + 10\lambda x + 8\lambda y, 2y + 8\lambda x + 10\lambda y),$$

os possíveis pontos de extremo deverão satisfazer

$$\begin{cases} 2x + 10\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ 2y + 8\lambda x + 10\lambda y = 0 \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \end{cases}$$

Claramente nem  $(0, 0)$  não é uma possível solução, uma vez que não é um ponto da elipse; portanto a única forma de podermos ter

$$\begin{bmatrix} 1 + 5\lambda & 4 \\ 4 & 1 + 5\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é ser

$$\det \begin{bmatrix} 1 + 5\lambda & 4 \\ 4 & 1 + 5\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 + 5\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 1 + 5\lambda = \pm 4.$$

Portanto obtemos  $x = \pm y$ , e substituindo na equação da elipse vem

$$10x^2 \pm 8x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \text{ ou } x^2 = \frac{9}{2}$$

correspondendo às distâncias à origem

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = (2x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ ou } 3.$$

Como a elipse é compacta e  $f$  contínua,  $f$  tem que possuir máximo e mínimo ao longo da elipse, e de acordo com o teorema acerca dos extremos condicionados tais pontos devem ser escolhidos de entre os pontos determinados acima. Como  $f$  só assume dois valores nesses pontos, um tem que ser o máximo e o outro o mínimo. Portanto os comprimentos dos semieixos da elipse são 1 e 3.

7. Calcule o máximo e o mínimo da função  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$  na região  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ .

**Resolução:** Uma vez que a bola fechada  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$  é compacta e  $f$  é contínua,  $f$  possui máximo e mínimo nesta região. Uma vez que

$$\nabla f(x, y, z) = (1, -2, 2) \neq \mathbf{0},$$

vemos que  $f$  não possui qualquer extremo local na bola aberta  $x^2 + y^2 + z^2 < 9$ , pelo que o máximo e o mínimo terão que estar na fronteira  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (1 + 2\lambda x, -2 + 2\lambda y, 2 + 2\lambda z),$$

os possíveis pontos de mínimo deverão satisfazer

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2 + 2\lambda y = 0 \\ 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{9}{4\lambda^2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1 \\ y = \pm 2 \\ z = \mp 2 \\ \lambda = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto o máximo e o mínimo serão necessariamente os pontos  $(1, -2, 2)$  e  $(-1, 2, -2)$ . (Isto aliás poderia ver-se imediatamente observando que a função  $f$  é simplesmente o produto interno com o vector fixo  $(1, -2, 2)$ ).