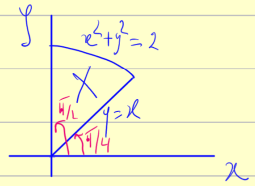
Coordenadas polares. Exemplos.

1- Seja $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<y<\sqrt{2-x^2}\}$



$y<\sqrt{2-x^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2<2$.

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{2}$

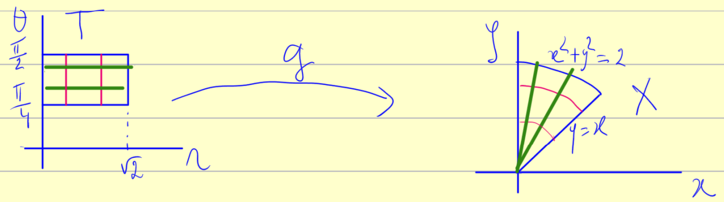
Sendo $x=r\cos\theta$ e $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, de $y=x$ vem

$r\cos\theta = r\,\mathrm{sen}\,\theta \Leftrightarrow tg(\theta)=1 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$.

De $x=0$, vem $r\cos\theta=0 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$.

Portanto, em coordenadas polares (r,θ) o conjunto X é descrito por:

$$0<r<\sqrt{2}\ ;\quad \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$$



A função mudança de variáveis g definida por

$g(r,\theta)=(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)=(x,y)$

transforma o conjunto T em X, ou seja, $X=g(T)$.

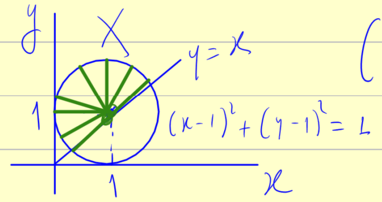
Aplicando o Teorema da mudança de variáveis tem-se:

$$vol_2(X)=\iint_X dx\,dy = \iint_T r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\left(\int_0^{\sqrt{2}} r\,dr\right)d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Fica claro das figuras acima que, para estabelecer os limites de integração para r e θ basta traçar em X segmentos de recta que passam pela origem.

2 - Seja $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1 ; y > x\}$



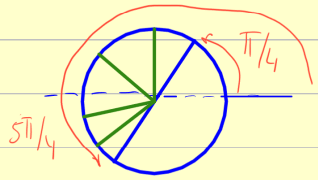
(semicírculo)

Neste caso o conjunto X está assinalado na figura com segmentos de recta verdes que passam pelo ponto $(1,1)$ que é o centro da circunferência $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Fazendo $\begin{array}{l} x-1 = r\cos\theta \\ y-1 = r\,\text{sen}\,\theta \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = 1 + r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

tem-se

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2 < 1$$



As coordenadas (r,θ), neste caso, referem-se ao ponto $(1,1)$ e não à origem como no exemplo anterior.

Seja $\varphi(r,\theta) = (1 + r\cos\theta, 1 + r\,\text{sen}\,\theta)$, definida no conjunto T:

$$0 < r < 1 ; \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$$

Tal como para as coordenadas polares referentes à origem, g é uma mudança de variáveis e

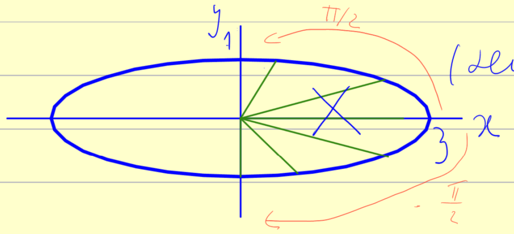
$$\det Dg(r,\theta) = r.$$

Portanto,

$$\mathrm{vol}_2(X) = \iint_X dx\,dy = \iint_T r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4}\left(\int_0^1 r\,dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

3- Seja $X = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + y^2 < 1 \,;\, x>0\right\}$



Note-se que para as coordenadas polares (r,θ) referentes à origem, tem-se

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

mas r varia com θ.

No entanto,

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 < 1$$

e fazendo

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

tem-se

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = r^2 < 1 \iff \boxed{r < 1}$$

Além disso, $x > 0 \iff 3r\cos\theta > 0$

$\iff \cos\theta > 0$

$\iff -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Assim, definindo

$$g(r,\theta) = (x,y) = (3r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$$

no conjunto $T = \{(r,\theta) : 0 < r < 1 ; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ facilmente se verifica que g é uma mudança de variáveis tal que

$$\det Dg(r,\theta) = 3r.$$

Portanto,

$$\text{vol}_2(X) = \iint_T 3r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left(\int_0^1 3r\,dr \right) d\theta = \frac{3\pi}{2} \quad //.$$