

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 6

(Teorema de Fubini)

1. Calcule o integral da função indicada no rectângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

- a) $f(x, y) = xy^3$.
- b) $f(x, y) = x \cos(xy)$.

2. Invertendo a ordem de integração, calcule:

- a) $\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \cos(x^2) dx \right) dy$.
- b) $\int_0^1 \left(\int_{\arcsen y}^{\pi/2} y \sen x dx \right) dy$.

3. Inverta a ordem de integração dos seguintes integrais duplos:

- a) $\int_0^1 \left(\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$.
- b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x, y) dy \right) dx$.
- c) $\int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{\sen y} f(x, y) dx \right) dy$.

4. Calcule a área da região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2x < y < 3 - x^2\},$$

usando um integral iterado da forma $\int (\int dx) dy$. Calcule ainda (usando a ordem de integração que entender) a coordenada x do centróide.

5. Escreva expressões para o volume de V na ordem indicada.

- a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq x + y\}$ nas ordens $\int (\int (\int dz) dx) dy$ e $\int (\int (\int dy) dx) dz$.
- b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 ; y^2 + z^2 \leq 1\}$ nas ordens $\int (\int (\int dz) dx) dy$ e $\int (\int (\int dz) dy) dx$.
- c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x ; 0 \leq z \leq x ; x \leq 1\}$ nas ordens $\int (\int (\int dx) dz) dy$ e $\int (\int (\int dx) dy) dz$.

6. Para cada um dos conjuntos seguintes escreva uma expressão para o respectivo volume, usando um único integral triplo:

- a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x ; 0 \leq z \leq x ; x \leq 1\}$,
- b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 ; 0 \leq z \leq x^2 - y^2 ; x > 0\}$.

7. Considere a região

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 1 ; x + y - 2z \leq 1 ; x \geq 0 ; y \geq 0\}.$$

Calcule o volume de V na forma:

- a) $\int \dots \left(\int \dots \left(\int \dots \dots dy \right) dx \right) dz$.
- b) $\int \dots \left(\int \dots \left(\int \dots \dots dz \right) dx \right) dy$.

8. Calcule $\int_V f$ sendo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y, z) = z$ e V o sólido limitado pelos planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ e $z = x + y$.

9. Calcule a primeira coordenada do centróide do sólido limitado pela superfície $z = x^2 - y^2$, o plano xy e os planos $x = 0$ e $x = 1$.