

## Cálculo Diferencial e Integral II

### Ficha de trabalho 5

(Derivadas de Ordem Superior. Extremos)

1. Calcule o gradiente e a matriz Hessiana de cada uma das funções seguintes:

a)  $f(x, y) = x \arctan y$

b)  $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + e^z$

2. Mostre que a função  $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  verifica a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0; \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

3. Seja  $w(x, y) = f(y - x, x + y)$ , em que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ . Mostre que se tem

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

em que  $u = y - x$  e  $v = x + y$ .

4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade de cada uma das funções seguintes:

a)  $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{x^3}{3}$

c)  $f(x, y) = e^{1+xy}$

d)  $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

e)  $f(x, y, z) = xz - x^2 - y^2$

f)  $f(x, y) = x^3 - y^4$

g)  $f(x, y) = x^3 - y^2$

h)  $f(x, y) = \frac{y^2}{2} + xy + x^4$