

## Cálculo Diferencial e Integral II

### Ficha de trabalho 3

(Diferenciabilidade)

1. Calcule as derivadas parciais de cada uma das funções seguintes:

a)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

b)  $g(x, y) = \frac{y}{x}$

2. Calcule as derivadas parciais na origem da função:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. Calcule a matriz Jacobiana de cada uma das funções seguintes:

a)  $f(x, y) = (xy, \log(xy))$

b)  $g(x, y, z) = (\sqrt{xy}, e^{yz})$

c)  $h(x, y, z) = (y^2, xz - y, z + xy)$

d)  $\phi(x, y, z) = y^2 - xyz + 2z$

e)  $\gamma(t) = (t^3, e^{-t}, \frac{1}{t})$

4. Calcule as derivadas de cada uma das funções seguintes no ponto  $P$  e segundo o vector  $\mathbf{v}$  indicados:

a)  $f(x, y) = y^x$ ;  $P = (2, 1)$ ;  $\mathbf{v} = (1, 1)$

b)  $g(x, y, z) = e^z + xy$ ;  $P = (1, 1, 1)$ ;  $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$

5. Determine um vector segundo o qual a derivada da função  $f(x, y) = x(y^2 + xy)$ , no ponto  $(1, 2)$  é nula.

6. Mostre que a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$  é diferenciável na origem e calcule a respectiva derivada.

7. Considere as funções:

i)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ii)  $g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

iii)  $h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Qual destas funções é diferenciável na origem? Justifique.

8. Considere a função:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Calcule as derivadas parciais de  $f$  no ponto  $(0, 1)$ .

b) Calcule a derivada de  $f$  no ponto  $(0, 1)$  segundo o vector  $(2, 1)$ .

c) Calcule a derivada de  $f$  no ponto  $(0, 0)$  segundo o vector  $(2, 3)$ .