Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 12

(Teorema de Green. Fluxos. Teorema da Divergência)

1. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = (-2y, x)$ e o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \; ; \; y > |x|\}$. Calcule o trabalho realizado por F ao longo da fronteira do conjunto D no sentido anti-horário.

2. Considere o campo vectorial
$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right).$$
Calcule o trabalho realizado por F ao longo de cada uma das linhas seguintes percorridas no sentido horário:
   a) Circunferência definida pela equação $(x+1)^2 + y^2 = 1$.
   b) Circunferência definida pela equação $(x-1)^2 + y^2 = 2$.
   c) Elipse definida por $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

3. Use o Teorema de Green para calcular a área do conjunto definido por $x^2 + \frac{y^2}{4} < 1 \; ; \; x > 0$.

4. Considere a superfície
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1 \; ; \; z < 0 \; ; \; y > 0\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$. Seja $H(x,y,z) = (-y, x, z)$. Calcule o fluxo $\int_A H \cdot n$.

5. Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (yz, xz, 2xy)$ através do cone definido por
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \; ; \; 0 < z < 1,$$
orientado com a normal n com terceira componente positiva.

6. Considere o campo $F(x,y,z) = h(r)(x,y,z)$ em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Calcule o fluxo de F através da esfera de raio igual a um, centro na origem e orientada com a normal n tal que $n(0,0,1) = (0,0,1)$.

7. Considere a superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \; ; \; z > 0\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Seja $F(x,y,z) = (x + y^2 + z, y - xy, z - x)$. Calcule o fluxo de F através de S no sentido de n, $\int_S F \cdot n$.

8. Calcule o volume do conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$ usando o teorema da divergência.

9. Considere a superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2 \; ; \; 0 < z < 1\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Seja $F(x,y,z) = (2xyz, z^2 - zy^2, z(1-z))$. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S segundo a normal n.