Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 11

(Trabalho. Campos Gradientes. Potenciais)

1. Para cada um dos casos seguintes calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial ao longo do caminho indicado:

   a) Campo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(x, y) = (-y, x)$ e caminho dado por $g(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$.

   b) Campo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (x, z, z - y)$ e caminho definido por $g(t) = (t^2, \cos t, \operatorname{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$.

2. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $f(x, y, z) = (x, z, 2y)$ ao longo das seguintes curvas:

   a) O segmento de recta que une o ponto $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

   b) A intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $z = x^2 - y^2$ num sentido que parece o anti-horário quando visto desde o ponto $(0, 0, 100)$.

   c) A intersecção das superfícies definidas pelas equações $x = y^2 + z^2$ e $2y + x = 3$ num sentido que parece o horário quando visto desde o ponto $(100, -1, 0)$.

3. Para cada um dos casos seguintes determine se o campo vectorial é ou não conservativo. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

   a) $a(x, y) = (y^2, x^3)$.

   b) $b(x, y) = (x^3 + y, y^2 + x)$.

   c) $c(x, y) = (e^x, e^y)$.

   d) $d(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

   e) $e(x, y, z) = (y, x, 2z)$.

   f) $g(x, y, z) = (-y, x, z)$.

4. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, 2z\right).$$

   a) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo da linha definida por

$$\{(\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ 0 \le t \le 2\pi\}.$$

   b) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo da linha definida pelas equações

$$y^2 + z^2 = 1\ ;\ x = y^2 - z^2$$

   segundo um sentido à sua escolha.