Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: LEEC, LEMec, LEAN, LEAer, LEFT
Exame Recurso - 18 de Julho de 2022 - 8h
Duração: 2 horas

1. Seja $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2+3y^2}}.$$

(2 val.) Determine, justificando, se existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$.

Resolução:

Temos,

$$0 \leq h \leq \frac{x^2}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}|x| \to 0.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0.$$

(2 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a e b sabendo que

$$\frac{\partial g}{\partial v}(1,1) = (2,3)$$

para $v = (5,7)$.

Resolução:

Temos, uma vez que g é de classe C^1 e portanto diferenciável,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(1,1) = Dg(1,1) \cdot v.$$

Logo, $10 + 7a = 2$ e $5b + 7 = 3$, pelo que $a = -8/7, b = -4/5$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x + (1-x^2)y$.

Resolução:

O sistema de equações

$$\nabla f(x,y) = (1-2xy, (1-x^2)) = (0,0)$$

tem as soluções $p_1 = (-1, -\frac{1}{2})$ e $p_2 = (1, \frac{1}{2})$. Temos a Hessiana,

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & -2x \\ -2x & 0 \end{bmatrix}.$$

O determinante da Hessiana de f em p_1, p_2 é negativo, pelo que ela tem valores próprios de sinais opostos sendo, portanto, p_1, p_2 pontos em sela.

4. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + z + 3w &= 3 \\ \operatorname{sen}(x+y) + 3z + w &= 1. \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que na vizinhança do ponto $(x,y,z,w) = (0,0,0,1)$ o sistema define (x,z) como função de classe C^1 de (y,w), ou seja, $(x,z) = f(y,w)$.

Resolução:

Seja $F(x,y,z,w) = (\operatorname{sen}(x+y) + z + 3w - 3, \operatorname{sen}(x+y) + 3z + w - 1)$. Temos,

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x,z)}(0,0,0,1) = 2 \neq 0.$$

O teorema da função implícita garante então que localmente, numa vizinhança aberta de $(0,0,0,1)$, as soluções do sistema $F(x,y,z,w) = 0$ podem ser escritas na forma de um gráfico $(x,z) = f(y,w)$, com f de classe C^1 e $f(0,1) = (0,0)$.

(1 val.) (b) Calcule $Df(0,1)$.

Resolução:

Temos $f = (f_1, f_2)$ e

$$F(f_1(y,w), y, f_2(y,w), w) = 0$$

numa vizinhança aberta de $(y,w) = (0,1)$. Derivando em y, w obtemos

$$Df(0,1) = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Considere

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 7 - 2\sqrt{x^2+y^2},\ y \geq 0\right\}$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V usando integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)\, dy)\, dz$.

Resolução:

$$Vol(V) = \int_{-1}^{3}\int_{0}^{\sqrt{z+1}}\int_{-\sqrt{z+1-y^2}}^{\sqrt{z+1-y^2}} 1dxdydz + \int_{3}^{7}\int_{0}^{\frac{7-z}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{(7-z)^2}{4}-y^2}}^{\sqrt{\frac{(7-z)^2}{4}-y^2}} 1dxdydz.$$

(3 val.) (b) Calcule o volume de V.

Resolução:

$$Vol(V) = \int_V 1 = \int_0^{\pi}\int_0^2\int_{-1+\rho^2}^{7-2\rho} \rho dz d\rho d\theta = \frac{20}{3}\pi.$$

(2 val.) 6. Considere o campo vetorial $H(x,y) = \big(-y + 2xyf(x^2y), x + x^2 f(x^2y)\big)$, onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Determine o valor máximo do trabalho realizado pelo campo H ao longo da fronteira de um retângulo R inscrito numa circunferência de raio 1.

Resolução:

Temos

$$\left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y}\right) = 2.$$

pelo teorema de Green, o trabalho será máximo para o rectângulo R com maior área. Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, verifica-se que esse rectângulo é um quadrado de lado $\sqrt{2}$. Logo, o máximo do trabalho é 4.

(3 val.) 7. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto simplesmente conexo. Seja $F : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 tal que para qualquer circunferência $C \subset U$,

$$\oint_C F = 0.$$

Determine se F tem, ou não, de ser gradiente em U.

Resolução:

Suponhamos que para $p \in U$,

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)(p) \neq 0.$$

Como F é de classe C^1, por continuidade, teremos que a diferença das derivadas cruzadas de F terá o mesmo sinal num disco de raio positivo suficientemente pequeno, centrado em p. Pelo teorema de Green, o trabalho de F na fronteira desse disco não seria 0 o que é uma contradição. Logo, F é fechado e, sendo U simpelsmente conexo, F é gradiente em U.