Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto LMAC, MEBiom, MEFT

Teste 2 - 09 de Junho de 2014 - **09h00 (versão 1)**

Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

1. Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 - xy + y^2 + z^2 = 2\}$.

[2 v] (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução: M é um conjunto de nível da função $F(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 + z^2$, de classe C^1. A matriz $DF(x,y,z) = [2x - y\,,\, -x + 2y\,,\, 2z]$ tem característica igual a 1 em todos os pontos de M, porque o único ponto onde a característica é igual a 0 é $(x,y,z) = (0,0,0) \notin M$. Logo M é uma variedade. A dimensão de M é $3 - \mathrm{car} DF = 3 - 1 = 2$.

[2,5 v] (b) Obtenha uma base do espaço tangente a M no ponto $(-1,-1,1)$.

Resolução: O vector linha $DF(-1,-1,1) = [-1,-1,2]$ constituí uma base do espaço normal a M nesse ponto. Portanto, resolvendo a equação linear $-x - y + 2z = 0$, obtém-se uma base do espaço tangente: $\{(-1,1,0),(2,0,1)\}$.

[2 v] (c) Admitindo que a função f dada por $f(x,y,z) = x + y$ tem valor máximo em M, calcule esse valor através do método dos multiplicadores de Lagrange.

Resolução: Os pontos de extremo de f em M pertencem ao conjunto de soluções, para (x,y,z), do sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x - y) \\ 1 = \lambda(2y - x) \\ 0 = \lambda(2z) \\ x^2 - xy + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ uma incógnita adicional. Da terceira equação deduz-se que $z = 0$, sendo $\lambda = 0$ incompatível com a primeira equação. As primeiras duas equações implicam $2x - y = 2y - x$, ou seja $x = y$. Da quarta equação tem-se então $x^2 = 2$. As duas soluções para (x,y,z) são portanto $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ e $(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$, ou seja o valor máximo de f em M é $f(\sqrt{2},\sqrt{2},0) = 2\sqrt{2}$.

[2 v] 2. Seja f a função dada pela expressão

$$f(x,y) = \left(\frac{4}{xy+1}, e^{x^2-y^2}\right).$$

Justifique que f não é injectiva no seu domínio. Mostre que, restrita a uma vizinhança do ponto $(1,1)$, f tem inversa local g de classe C^1, e calcule $Dg(2,1)$.

Resolução: f não é injectiva, pois $f(1,1) = (2,1) = f(-1,-1)$. A Jacobiana de f:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{-4y}{(xy+1)^2} & \frac{-4x}{(xy+1)^2} \\ \\ 2xe^{x^2-y^2} & -2ye^{x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

tem entradas contínuas, portanto $f \in C^1$. Tem-se ainda:

$$\det Df(1,1) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0\,.$$

Assim, pelo teorema da função inversa, restrita a uma vizinhança do ponto $(1,1)$, f tem inversa local g de classe C^1. O teorema implica ainda:

$$Dg(2,1) = [Df(1,1)]^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

3. Considere o campo vectorial definido por $H(x,y,z) = (y^2, 2xy + z^2, 2yz)$.

[1,5 v] (a) Calcule um potencial escalar para o campo H.

Resolução: Resolvendo $\nabla\varphi = H$ obtém-se que $\varphi(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ é um potencial escalar de classe C^1 para H.

[1 v] (b) Calcule o trabalho de H ao longo do caminho

$$\gamma(t) = (\operatorname{sen}(1-t^2), t\cos(1-t^2), 1+t)\ ,\ \text{com } t \in [-1,1].$$

Resolução: Pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e usando a alínea anterior:

$$\int_C H \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(-1)) = \varphi(0,1,2) - \varphi(0,-1,0) = 4\ .$$

4. Seja

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = 2x^2 + 2y^2\ ,\ z < 2\}\ ,$$
$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 = 1\ ,\ z = 2\}\ ,$$

e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = (y - x, -x, z)\ .$$

[2 v] (a) Calcule o trabalho de F ao longo de L, no sentido horário visto do ponto $(0,0,10)$.

Resolução: Usando a definição de trabalho, como $g(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 2)$, com $t \in]0, 2\pi[$, é uma parametrização de L no sentido contrário ao pedido, obtém-se

$$W = -\int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t)dt = -\int_0^{2\pi} (-1 + \operatorname{sen}(t)\cos(t))dt = 2\pi\ .$$

[2 v] (b) Calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal unitária com terceira componente negativa, usando o Teorema da Divergência.

Resolução: Seja $T = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2 \leq 1 \,,\, z=2)\}$ e seja D o sólido limitado pelas superfícies M e T. Seja ainda $n_T = (0,0,1)$ e n_M a normal a M dada no enunciado. Aplicando o teorema da divergência, como $\partial D = M \cup T$, fica

$$\iiint_D \mathrm{div}(F) = \iint_M F \cdot n_M + \iint_T F \cdot n_T \Leftrightarrow \iint_M F \cdot n_M = -\iint_T F \cdot n_T \ ,$$

pois $\mathrm{div} F = 0$ e as normais n_T e n_M são exteriores, portanto,

$$\iint_M F \cdot n_M = -\iint_T F \cdot (0,0,1) = -\iint_T 2 = -2\text{Área}(T) = -2\pi \ .$$

[2 v] (c) Mostre que $F = \mathrm{rot}(A)$, com $A(x,y,z) = (-xz, xz, \frac{1}{2}y^2)$, e determine o trabalho de A ao longo de L no sentido anti-horário visto do ponto $(0,0,10)$.

Resolução: Aplicando a definição de rotacional ao campo A fica

$$\mathrm{rot}(A) = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \,,\, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \,,\, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) = (y-x, -x, z) \ .$$

Uma vez que L é o bordo de M, aplicamos o teorema de Stokes à superfície M e usamos o resultado do fluxo obtido em (b). A normal unitária a M compatível com o sentido de L dado é a simétrica da normal n_M, já usada em (b), logo

$$\int_L A \cdot dg = -\iint_M \mathrm{rot}(A) \cdot n_M = -\iint_M F \cdot n_M = 2\pi \ .$$

[3 v] 5. Seja $F : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, definida num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Seja $a \in D$ tal que $F(a) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Nestas condições, o teorema da função implícita implica que o conjunto dado por $F(x) = 0$ é o gráfico de uma função $f : S \to \mathbb{R}$, onde $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$, com f de classe C^1, numa vizinhança do ponto a. Mostre que, sendo F de classe C^2, então f é de classe C^2. Obtenha uma expressão para a entrada ij da matriz Hessiana de f no ponto $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ em termos das derivadas de F no ponto a.

Resolução: Pelo teorema da função implícita, as derivadas de f de primeira ordem, $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, são dadas em S por:

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1,\ldots,x_{n-1})\big)}{\frac{\partial F}{\partial x_n}\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1,\ldots,x_{n-1})\big)} \, .$$

As funções $\partial F / \partial x_i$, com $i = 1, \ldots, n$, pertencem à classe C^1, uma vez que $F \in C^2$. Portanto $f \in C^2$, porque as funções $\partial f / \partial x_i$, com $i = 1, \ldots, n-1$, são de classe C^1, sendo obtidas das derivadas $\partial F / \partial x_i$ e $f \in C^1$, através de operações lineares, multiplicação, divisão e composição.

Derivando a equação $(*)$ em ordem x_j, usando o teorema da função composta, e substituindo $(*)$, obtém-se a expressão pedida para $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1, \ldots, a_{n-1})$, substituindo o ponto $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}, f(a_1,\ldots,a_{n-1}))$ no segundo membro da equação:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_n}\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2} - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^3} \, .$$