Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - v1 - 9h - 06 de junho de 2016
Duração: 1h30m

Resolução abreviada

[3.0] 1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + \mathrm{e}^{y+z} + (x+y)\cos z = 3 \\ (x+y)\operatorname{sen} z + \mathrm{e}^{y+z} = 1 \end{cases}$$

Prove que o sistema permite definir x e y como funções continuamente diferenciáveis de z numa vizinhança de $(1,0,0)$. Representando essas funções por x e y, calcule a derivada $\dfrac{dy}{dz}(0)$.

Resolução: Sendo

$$F(x,y,z) = \Big(x^2 + \mathrm{e}^{y+z} + (x+y)\cos z - 3, (x+y)\operatorname{sen} z + \mathrm{e}^{y+z} - 1\Big),$$

$F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ visto que é a soma, produto e composta de funções polinomais com a exponencial, o seno e o cosseno. Tem-se, também, que $F(1,0,0) = (0,0)$ e que

$$\det\left[\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(1,0,0)\right] = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Então, pelo teorema da função implícita, a igualdade define (x,y) como função continuamente diferenciável de z numa vizinhança do ponto considerado. Tem-se ainda,

$$\left[\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}z}(0)\right] = -\left[\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(1,0,0)\right]^{-1}\left[\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z)}(1,0,0)\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Logo, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}(0) = -2$.

2. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ e

$$C_{\alpha,n} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^n - y^n = \alpha\right\}$$

[1.5] a) Prove que $C_{\alpha,n}$ é uma variedade para qualquer $\alpha \neq 0$. Qual a sua dimensão?

Resolução: Sendo $G(x,y) = x^n - y^n - \alpha$ então $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$ pois é uma função polinomial. A característica de $DG(x,y) = \begin{bmatrix} nx^{n-1} & ny^{n-1} \end{bmatrix}$ é 1 em todos os pontos menos na origem que não pertence a $C_{\alpha,n}$ quando $\alpha \neq 0$. Conlui-se, assim, que $C_{\alpha,n}$ é uma variedade de dimensão $2 - 1 = 1$.

[1.5] b) Indique o espaço tangente a $C_{4,2}$ no ponto $(2,0)$.

Resolução: O espaço tangente é composto pelos vectores ortogonais a $\nabla G(2,0) = (4,0)$ ou seja o espaço

$$\{(0,v) : v \in \mathbb{R}\}$$

[1.0] c) Diga, justificando, se $C_{0,n}$ é variedade diferencial para n ímpar. O que pode afirmar para n par?

Resolução: Se n é ímpar, $C_{0,n} = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ logo é uma variedade diferencial de dimensão 1 (é uma recta). Se n é par, $C_{0,n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ que não é variedade diferencial porque é a união de duas rectas que se cruzam em $(0,0)$.

[3.0] 3. Estude, quanto à existência de extremos, a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x + y$ em que $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 8\}$.

Resolução: D é uma variedade compacta pois trata-se de um elipsóide de eixos $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ e 2 e f é uma função contínua. Logo, pelo teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em D. Como, $\nabla f(x,y,z) = (1,1,0)$ e, sendo D definido por $H(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-8 = 0$, $\nabla H(x,y,z) = \big(2x, 3+2y, 4z\big)$, usando o método dos multiplicadores de Lagrange obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ \lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 2 \\ z = 0 \\ \lambda = \frac{\mp 1}{4} \end{cases}$$

Sabendo que f tem máximo e mínimo em D, que os extremantes têm que ser $(2,2,0)$ e $(-2,-2,0)$ e que $f(2,2,0) = 4$ e $f(-2,-2,0) = -4$, é imediato que $\max_D f = 4$ e $\min_D f = -4$.

[3.0] 4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\ ;\ 0 < z < 2 - y\}$$

e o campo vetorial $F(x,y,z) = (yz, -y-z, y+z)$. Calcule o fluxo de F através de S segundo a normal n tal que $n(1,0,\frac{1}{2}) = (1,0,0)$, usando o teorema da divergência.

Resolução: Aplica-se o teorema da divergência ao domínio

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\ ;\ 0 < z < 2 - y\}$$

e, tendo em conta que $\operatorname{div} F = 0$, obtem-se

$$\iint_S F \cdot n = -\iint_A F \cdot n - \iint_B F \cdot n,$$

em que

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\ ;\ z = 0\}$$

e

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\ ;\ z = 2 - y\}.$$

Na superfície A tem-se:

$F(x,y,z) = (0,-y,y)\ ;\ n(x,y,z) = (0,0-1)$ e, portanto, $F \cdot n = -y$, de onde resulta $\displaystyle\iint_A F \cdot n = -\iint_A y = 0$.

Na superfície B tem-se:

$F(x,y,z) = (yz,-2,2)\ ;\ n(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, ou seja, $\displaystyle\iint_A F \cdot n = 0$.

Assim, concluímos que $\displaystyle\iint_S F \cdot n = 0$.

5. Considere a linha

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \ ; \ y + z = 1\}$$

e o campo vetorial $F(x, y, z) = (5y, 5x + e^{y^2}, yz)$.

[1.0] a) Indique justificadamente se o campo F é conservativo.

Resolução: Dado que $\dfrac{\partial F_3}{\partial y} = z$ e $\dfrac{\partial F_2}{\partial z} = 0$, o campo F não é fechado e, portanto, não é conservativo.

[3.0] b) Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo F ao longo da linha L percorrida uma vez no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 0, 100)$.

Resolução: A linha L é o bordo da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z \ ; \ y + z = 1\}$$

orientada com a normal $n(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ e, aplicando o teorema de Stokes, obtem-se

$$\int_L F \cdot dg = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (z, 0, 0) \cdot (0, 1, 1) = 0.$$

[3.0] 6. Sejam $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dois campos escalares de classe C^2 e S uma superfície limitada e orientável com bordo ∂S. Prove que

$$\int\int_S (\nabla\phi \times \nabla\psi).n \, \mathrm{d}S = \int_{\partial S} (\phi\nabla\psi) \, \mathrm{d}g$$

em que g é um caminho regular que descreve ∂S com orientação compatível com a da normal n de S.

Resolução: Nas condições do enunciado pode aplicar-se o teorema de Stokes ao campo vectorial $H = (\phi\nabla\psi)$ na superfície S do que resulta, sendo ∂S o bordo de S orientado de modo compatível com a normal considerada para S,

$$\int\int_S (\nabla \times H).n \, \mathrm{d}S = \int_{\partial S} H. \, \mathrm{d}g$$

Como

$$\nabla \times H = (\nabla\phi) \times (\nabla\psi) + \phi\big(\nabla \times (\nabla\psi)\big)$$

e $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$ pois $\nabla\psi$ é um campo vetorial fechado de classe C^1 (é o gradiente de uma função de classe C^2), obtém-se a igualdade pretendida.