Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 06 de Janeiro de 2014 - **14h00 (versão 1)**

Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 \; ; \; x^2 - xy + y^2 = 3\}$$

(1 val.) a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

Resolução: Definindo a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1, através da expressão $F(x, y, z) = (z - x^2 + y^2, x^2 - xy + y^2)$, é claro que M é o conjunto de nível $(0, 3)$ de F.

Além disso, a matriz

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} -2x & 2y & 1 \\ 2x - y & 2y - x & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2 em todos os pontos de M. Se tal não acontecesse, ter-se-ia

$$\begin{cases} 2y - x = 0 \\ 2x - y = 0 \\ -2x(2y - x) = 2y(2x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Fazendo $x = 0$ e $y = 0$ na definição de M ter-se-ia o absurdo: $0 = x^2 = z = 3$. Portanto, M é uma variedade de dimensão um.

(1 val.) b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(1, -1, 0)$.

Resolução: As linhas da matriz

$$DF(1, -1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

constituem a base do espaço normal a M no ponto $(1, -1, 0)$. Assim, o espaço tangente é o conjunto de vectores $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ que verificam as equações

$$\begin{cases} -2a - 2b + c = 0 \\ 3a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a \\ b = a, \end{cases}$$

ou seja, é o espaço gerado pelo vector $(1, 1, 4)$.

(2 val.) c) Determine o ponto de M que apresenta maior coordenada x.

Resolução: Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, o ponto pretendido é solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda_1 x + \lambda_2(2x-y) \\ 0 = 2\lambda_1 y + \lambda_2(2y-x) \\ 0 = \lambda_1 \\ z = x^2 - y^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_2(2x-y) \\ 0 = \lambda_2(2y-x) \\ 0 = \lambda_1 \\ z = x^2 - y^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

sendo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Da segunda equação tem-se $\lambda_2 = 0$ ou $x = 2y$. Fazendo $\lambda_2 = 0$, da primeira equação obtém-se o absurdo $1 = 0$. fazendo $x = 2y$, da quarta equação e da quinta equação deduz-se: $z = 3y^2$ e $y^2 = 1$. Assim, as soluções são $(-2,-1,3)$ e $(2,1,3)$ e, portanto, o ponto de maior coordenada x é $(2,1,3)$.

(2 val.) 2. Mostre que a equação $3x - y^2 + \cos(x^2 - y) + 2z = 3$ define implicitamente x como função de (y,z), em alguma vizinhança do ponto $(0,0,1)$. Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,1)$.

Resolução: Definindo a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, através da expressão $F(x,y,z) = 3x - y^2 + \cos(x^2 - y) + 2z$ e verificando que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0,1) = 3 \neq 0$, conclui-se o pretendido. Usando a regra da cadeia, tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1)\frac{\partial x}{\partial z}(0,1) + \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) = 0 \Leftrightarrow 3\frac{\partial x}{\partial z}(0,1) + 2 = 0$$

e, portanto, $\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,1) = -\dfrac{2}{3}$.

(2 val.) 3. Considere o campo vectorial $F(x,y) = \left(-y + \dfrac{x}{1+x^2}, 2x - \dfrac{y}{1+y^2}\right)$.

Calcule o trabalho realizado por F ao longo do losango definido por $|x| + \dfrac{|y|}{2} = 1$, percorrido uma vez no sentido horário.

Resolução: Seja Γ o losango e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + \dfrac{|y|}{2} < 1\}$. É claro que $\Gamma = \partial D$ e, usando o Teorema de Green, o trabalho é dado por

$$\int_\Gamma F \cdot dg = -3\mathrm{vol}_2(D) = -12.$$

4. Seja $F(x, y, z) = (x, 2y + 2, z)$ e considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1 + y \ ; \ 0 < y < 3\}$$

orientada com a normal n que tem a segunda componente negativa.

(3 val.) a) Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$ pela definição.

Resolução: Consideramos a parametrização de S dada por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho^2 - 1, \rho \operatorname{sen}\theta)$$

onde $1 < \rho < 2$ e $0 < \theta < 2\pi$. Usando a definição temos

$$\begin{aligned}\int_S F \cdot n &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 F(g(\rho, \theta)) \cdot (D_1 g(\rho, \theta) \times D_2 g(\rho, \theta))\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (\rho\cos\theta, 2\rho^2, \rho\operatorname{sen}\theta) \cdot (2\rho^2 \cos\theta, -\rho, 2\rho^2 \operatorname{sen}\theta) = 0\end{aligned}$$

(3 val.) b) Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$ pelo Teorema da Divergência.

Resolução: Definimos o conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 + y \ ; \ 0 < y < 3\}.$$

Temos $\partial D = S \cup T_0 \cup T_1$ onde $T_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 \,;\, y = 0\}$ e $T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 4 \,;\, y = 3\}$. Usando o Teorema da Divergência, uma vez que $\operatorname{div} F = 4$, obtemos

$$4\operatorname{vol}(D) = \int_S F \cdot n + \int_{T_0} F \cdot n_0 + \int_{T_1} F \cdot n_1,$$

onde n_0, n_1 são as normais exteriores a T_0 e T_1, respectivamente. Calculamos o volume de D fazendo uma mudança de coordenadas:

$$4\operatorname{vol}(D) = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{1+y}} \rho\, d\rho\, dy\, d\theta = 30\pi.$$

O fluxo através da tampa T_0 é dado por $\int_{T_0} F \cdot n_0 = -2\, vol_2(T_0) = -2\pi$, pois $n_0 = (0, -1, 0)$ e $F \cdot n_{0|T_0} = -2(y+1)_{|T_0} = -2$. O fluxo através da tampa T_1 é dado por $\int_{T_1} F \cdot n_1 = 8\, vol_2(T_1) = 32\pi$, pois $n_0 = (0, 1, 0)$ e $F \cdot n_{1|T_1} = 2(y + 1)_{|T_1} = 8$. Logo $\int_S F \cdot n = 0$.

(3 val.) c) Sendo $G(x, y, z) = (z, \operatorname{sen}(yx), -x)$ calcule o fluxo de $\operatorname{rot} G$ através da superfície S, no sentido da normal n.

Resolução: Usando o Teorema de Stokes sabemos que o fluxo de $\operatorname{rot} G$ é dado por

$$\int_S \operatorname{rot} G \cdot n = \int_{\partial S} G \cdot dg = \oint_{\Gamma_0} G \cdot dg_0 + \oint_{\Gamma_1} G \cdot dg_1,$$

onde Γ_0, Γ_1 são as circunferências nos planos $y = 0$ e $y = 3$ definidas pelas equações $x^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 4$, respectivamente. As parametrizações g_0 e g_1 para as circunferências Γ_0 e Γ_1 podem ser dadas por $g_0(\theta) = (\cos\theta, 0, -\operatorname{sen}\theta)$ e $g_1 = (2\cos\theta, 3, 2\operatorname{sen}\theta)$. Assim,

$$\int_S \operatorname{rot} G \cdot n = \int_0^{2\pi} G(g_0(\theta)) \cdot g_0'(\theta)\, d\,\theta + \int_0^{2\pi} G(g_1(\theta)) \cdot g_1'(\theta)\, d\,\theta = -6\pi.$$

(3 val.) 5. Seja $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(-1,-1),(1,1)\} \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial fechado e $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$ as circunferências definidas pelas equações $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ e $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, respectivamente. Sabendo que

$$\oint_{C_1} F \cdot dg_1 = b_1, \quad \oint_{C_2} F \cdot dg_2 = b_2 \quad \text{com } b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

onde as curvas C_1 e C_2 são percorridas uma vez no sentido anti-horário, determine, justificadamente, todos os valores possíveis para o integral de linha $\oint_C F \cdot dg$ onde C é uma curva regular fechada contida no domínio de F.

Resolução: Os valores possíveis para $\oint_C F \cdot dg$ são $k_1 b_1 + k_2 b_2$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.