Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 9 de Abril de 2016 - 09h00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\operatorname{sen} x)y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que g é contínua na origem.
Resolução: Se $(x,y) \neq (0,0)$ tem-se

$$|g(x,y) - g(0,0)| = |\operatorname{sen} x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x| \longrightarrow 0 \ .$$

(2 val.) (b) Calcule, se existirem, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ e a derivada de g no ponto $(0,0)$ segundo o vector $v = (1,2)$, $D_v g(0,0)$.
Resolução: Tem-se $g(x,0) = 0$ e $g(0,y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e por isso

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = 0 \ , \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{g(0,k)-g(0,0)}{k} = 0 \ . \end{aligned}$$

E $D_v g(0,0)$ é o limite seguinte:

$$\lim_{t\to 0}\frac{g((0,0)+tv)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{g(t,2t)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{4(\operatorname{sen} t)t^2}{5t^3} = \frac{4}{5} \ .$$

(1 val.) (c) Diga, justificando, se g é diferenciável na origem.
Resolução: A função não é diferenciável em $(0,0)$ porque se fosse ter-se-ia

$$D_v g(0,0) = Dg(0,0)v = [0 \ 0]v = 0 \ .$$

(2 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável na origem com matriz Jacobiana nesse ponto

$$Dg(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

e tal que $g(0,0,0) = 0$. Sendo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y,z) = g(x+y+z, g(x,y,z), xyz),$$

calcule $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)$.

Resolução: Pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) &= \frac{\partial g}{\partial x}\big(0,g(0,0,0),0\big)\ \frac{\partial}{\partial y}(x+y+z)\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial y}\big(0,g(0,0,0),0\big)\frac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial z}\big(0,g(0,0,0),0\big)\frac{\partial}{\partial y}(xyz)\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0)+\left(\frac{\partial g}{\partial y}(0,0,0)\right)^2 \\
&= 1+2^2=5\ .
\end{aligned}$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $f(x,y)=x^5-5xy+y^5$.

Resolução: Tem-se $Df(x,y)=\begin{bmatrix}5x^4-5y & -5x+5y^4\end{bmatrix}$ e por isso

$$\begin{aligned}
Df(x,y)=0 &\iff \begin{cases} x^4=y \\ x=y^4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^4=y \\ x=x^{16} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^4=y \\ x(1-x^{15})=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Os pontos críticos são $(0,0)$ e $(1,1)$. A matriz Hessiana é

$$\begin{aligned}
D^2f(x,y) &= \begin{bmatrix} 20x^3 & -5 \\ -5 & 20y^3 \end{bmatrix} \\
D^2f(0,0) &= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \\
D^2f(1,1) &= \begin{bmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 20 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

$D^2f(0,0)$ é indefinida (porque tem traço nulo e determinante não nulo, pelo que tem dois valores próprios $\pm\lambda$ com $\lambda\neq 0$) e $D^2f(1,1)$ é definida positiva (porque tem traço e determinante positivos, pelo que tem valores próprios positivos). Logo, $(0,0)$ é um ponto de sela e $(1,1)$ é um ponto de mínimo.

4. Considere o conjunto definido por

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<y<1\ ;\ x^2<z<2\ ;\ |x|<1\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$ e da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\text{vol}(V) &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^2 1\,dz\right)dx\right)dy \\
\text{vol}(V) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} 1\,dx\right)dy\right)dz + \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 1\,dx\right)dy\right)dz
\end{aligned}$$

(2 val.) b) Calcule o volume de V.

Resolução:

$$\text{vol}(V) = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^2 1\,dz\right)dx\right)dy = \frac{10}{3}$$

(2 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule a massa do sólido

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 < y^2+1\ ;\ 0<y<1\ ;\ z>0\},$$

sabendo que a função densidade de massa é dada por $g(x,y,z) = 4y$.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (y,ρ,θ) tem-se:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = y \\ z = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

e a massa é dada por

$$\text{massa}(A) = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y^2+1}} 4y\rho\,d\rho\right)dy\right)d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

(3 val.) 6. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

em todos os pontos do disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Mostre que u tem um mínimo em D e este se encontra em $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

Resolução:

Como u é uma função contínua e D é um conjunto compacto sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que a função u tem máximo e mínimo absolutos em D. Os extremos no interior do disco correspondem a pontos de estacionaridade de u, que são classificados usando a matriz Hessiana:

$$D^2u(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz Hessiana é a soma dos valores próprios e neste caso sabemos, por hipótese que é negativo, portanto pelo menos um dos valores próprios é negativo. Logo não podemos ter um ponto de mínimo no interior de D. Donde podemos concluir que o mínimo pertence então à fronteira de D.