Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 9 de Abril de 2016 - 09h00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Resolução abreviada

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que f é contínua na origem.

Resolução: Se $(x,y) \neq (0,0)$ tem-se

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|\operatorname{sen}(x^2y)|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^2y|}{x^2} = |y| \longrightarrow 0 \; .$$

(2 val.) (b) Calcule, se existirem, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $v = (1,1)$, $D_v f(0,0)$.

Resolução: Tem-se $f(x,0) = 0$ e $f(0,y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e por isso

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \; , \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0 \; . \end{aligned}$$

Também temos

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t^3}{2t^3} = \frac{1}{2} \; .$$

(1 val.) (c) Diga, justificando, se f é diferenciável na origem.

Resolução: A função não é diferenciável em $(0,0)$ porque se fosse ter-se-ia

$$D_v f(0,0) = Df(0,0)v = [0 \; 0]v = 0 \; .$$

(2 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável na origem com matriz Jacobiana nesse ponto

$$Df(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e tal que $f(0,0,0) = 0$. Sendo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x,y,z) = f(f(x,y,z), x+y+z, xyz),$$

calcule $\frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0)$.

Resolução: Pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(f(0,0,0),0,0\big)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\big(f(0,0,0),0,0\big)\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z)\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}\big(f(0,0,0),0,0\big)\frac{\partial}{\partial x}(xyz)\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) \\
&= 2^2+3 = 7\ .
\end{aligned}$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x,y) = x^6 - 6xy + y^6$.

Resolução: Tem-se $Dg(x,y) = \begin{bmatrix} 6x^5 - 6y & \quad -6x + 6y^5 \end{bmatrix}$ e por isso

$$\begin{aligned}
Dg(x,y) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^5 = y \\ x = y^5 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^5 = y \\ x = x^{25} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^5 = y \\ x(1-x^{24}) = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Os pontos críticos são $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$. A matriz Hessiana é

$$\begin{aligned}
D^2g(x,y) &= \begin{bmatrix} 30x^4 & -6 \\ -6 & 30y^4 \end{bmatrix} \\
D^2g(0,0) &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \\
D^2g(\pm1,\pm1) &= \begin{bmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 30 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

$D^2g(0,0)$ é indefinida (porque tem traço nulo e determinante não nulo, pelo que tem dois valores próprios $\pm\lambda$ com $\lambda \neq 0$) e $D^2g(\pm1,\pm1)$ é definida positiva (porque tem traço e determinante positivos, pelo que tem valores próprios positivos). Logo, $(0,0)$ é um ponto de sela e os pontos $(-1,-1)$ e $(1,1)$ são de mínimo.

4. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1\ ;\ 0 < z < 2 - y^2\ ;\ |y| < 1\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\text{vol}(S) &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{2-y^2} 1\, dz \right) dy \right) dx \\
\text{vol}(S) &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 1\, dx \right) dy \right) dz + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2-z}}^{\sqrt{2-z}} \left(\int_0^1 1\, dx \right) dy \right) dz
\end{aligned}$$

(2 val.) b) Calcule o volume de S.

Resolução:

$$\text{vol}(S) = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{2-y^2} 1\, dz \right) dy \right) dx = \frac{10}{3}$$

(2 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < x^2 + 1 \; ; \; 0 < x < 1 \; ; \; z > 0\},$$

sabendo que a função densidade de massa é dada por $f(x,y,z) = 2x$.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (x, ρ, θ) tem-se:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho \cos\theta \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

e a massa é dada por

$$\text{massa}(B) = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x^2+1}} 2x\rho\, d\rho \right) dx \right) d\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

(3 val.) 6. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

em todos os pontos do disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Mostre que u tem um mínimo em D e este se encontra em $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Resolução:

Como u é uma função contínua e D é um conjunto compacto sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que a função u tem máximo e mínimo absolutos em D. Os extremos no interior do disco correspondem a pontos de estacionaridade de u, que são classificados usando a matriz Hessiana:

$$D^2u(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz Hessiana é a soma dos valores próprios e neste caso sabemos, por hipótese que é negativo, portanto pelo menos um dos valores próprios é negativo. Logo não podemos ter um ponto de mínimo no interior de D. Donde podemos concluir que o mínimo pertence então à fronteira de D.