

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 9 de Abril de 2016 - 11h30

Duração: 90 minutos

Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2 val.)

- (a) Mostre que f é contínua na origem.

Resolução: Se $(x, y) \neq (0, 0)$ tem-se

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2y^2}{x^4 + 2y^2} - 0 \right| \leq \frac{x^2y^2}{2y^2} = \frac{x^2}{2} \rightarrow 0 .$$

(2 val.)

- (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e mostre que f é diferenciável na origem.

Resolução: Como $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ conclui-se que no ponto $(0, 0)$ se tem $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, e portanto a matriz Jacobiana nesse ponto é $Df(0, 0) = [0 \ 0]$. Portanto f é diferenciável na origem porque

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - Df(0, 0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2k^2}{(h^4 + 2k^2)\|(h, k)\|} = 0 ,$$

uma vez que

$$\left| \frac{h^2k^2}{(h^4 + 2k^2)\|(h, k)\|} \right| \leq \frac{\|(h, k)\|^2 k^2}{2k^2\|(h, k)\|} = \frac{\|(h, k)\|}{2} \rightarrow 0 .$$

(1 val.)

- (c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}$ nos restantes pontos de \mathbb{R}^2 e diga, justificando, se f é de classe C^1 .

Resolução: Tem-se, se $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + 2y^2} - \frac{4x^2y^3}{(x^4 + 2y^2)^2} .$$

Se $x \neq 0$ obtém-se $\frac{\partial f}{\partial y}(x, x^2) = \frac{2}{9}$ e portanto f não é de classe C^1 porque $\frac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua na origem devido a ter-se $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

(2 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciável no ponto $(1, 1)$ com matriz Jacobiana nesse ponto

$$Df(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sendo $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = f(e^{xy}, x + y + 1)$, calcule $\frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0)$.

Resolução: Pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(e^{xy}, x + y + 1) \left. \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) \right|_{(x,y)=(0,0)} \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial y}(e^{xy}, x + y + 1) \left. \frac{\partial}{\partial x}(x + y + 1) \right|_{(x,y)=(0,0)} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 1) = 4. \end{aligned}$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $f(x, y) = (\sin x)^2 + y^2$.

Resolução: Temos $Df(x, y) = [2 \sin x \cos x \quad 2y] = [\sin(2x) \quad 2y]$. Então

$$Df(x, y) = [0 \quad 0] \iff \begin{cases} \sin(2x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e os pontos críticos são todos da forma $(x, y) = (k\pi/2, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$. A matriz Hessiana é, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} D^2f(x, y) &= \begin{bmatrix} 2 \cos(2x) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ D^2f(k\pi, 0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{definida positiva}) \\ D^2f(\pi/2 + k\pi, 0) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{indefinida}), \end{aligned}$$

pelo que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, o ponto $(k\pi, 0)$ é de mínimo e o ponto $(\pi/2 + k\pi, 0)$ é de sela.

4. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 ; y^2 < z < 2 + y\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\text{vol}(S) &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{2+y} 1 dz \right) dy \right) dx \\ \text{vol}(S) &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \left(\int_0^1 1 dx \right) dy \right) dz + \int_1^4 \left(\int_{z-2}^{\sqrt{z}} \left(\int_0^1 1 dx \right) dy \right) dz\end{aligned}$$

- (2 val.) b) Sabendo que a função densidade de massa é dada por $f(x, y, z) = 2x$, calcule a massa de S .

Resolução:

$$\text{massa}(S) = \int_0^1 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{2+y} 2x dz \right) dy \right) dx = \frac{9}{2}$$

- (2 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} < y < 2 - x^2 - z^2\}.$$

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (y, ρ, θ) tem-se:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = y \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

e o volume é dado por

$$\text{vol}(B) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho}^{2-\rho^2} \rho dy \right) d\rho \right) d\theta = \frac{5\pi}{6}.$$

- (3 val.) 6. Seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

em todos os pontos de \mathbb{R}^2 . Supondo que $u = 0$ na fronteira do disco unitário $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, mostre que $u \leq 0$ em D .

Resolução: Como u é uma função contínua e D é um conjunto compacto sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que a função u tem máximo e mínimo absolutos em D . Os extremos no interior do disco correspondem a pontos de estacionaridade de u , que são classificados usando a matriz Hessiana:

$$D^2 u(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz Hessiana é a soma dos valores próprios e neste caso sabemos, por hipótese que é positivo, portanto pelo menos um dos valores próprios é positivo. Logo não podemos ter um ponto de máximo no interior de D . De onde podemos concluir que o máximo pertence então à fronteira de D . Como $u = 0$ na fronteira de D este é o valor máximo de u , ou seja, $u \leq 0$.