

## Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 9 de Abril de 2016 - 11h30

Duração: 90 minutos

Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Considere a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que  $f$  é contínua na origem.

**Resolução:** Se  $(x, y) \neq (0, 0)$  tem-se

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^4 + 2y^2} - 0 \right| \leq \frac{x^2 y^2}{2y^2} = \frac{x^2}{2} \rightarrow 0.$$

(2 val.) (b) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  e mostre que  $f$  é diferenciável na origem.

**Resolução:** Como  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  conclui-se que no ponto  $(0, 0)$  se tem  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , e portanto a matriz Jacobiana nesse ponto é  $Df(0, 0) = [0 \ 0]$ . Portanto  $f$  é diferenciável na origem porque

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - Df(0, 0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k^2}{(h^4 + 2k^2)\|(h, k)\|} = 0,$$

uma vez que

$$\left| \frac{h^2 k^2}{(h^4 + 2k^2)\|(h, k)\|} \right| \leq \frac{\|(h, k)\|^2 k^2}{2k^2 \|(h, k)\|} = \frac{\|(h, k)\|}{2} \rightarrow 0.$$

(1 val.) (c) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial y}$  nos restantes pontos de  $\mathbb{R}^2$  e diga, justificando, se  $f$  é de classe  $C^1$ .

**Resolução:** Tem-se, se  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + 2y^2} - \frac{4x^2 y^3}{(x^4 + 2y^2)^2}.$$

Se  $x \neq 0$  obtém-se  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, x^2) = \frac{2}{9}$  e portanto  $f$  não é de classe  $C^1$  porque  $\frac{\partial f}{\partial y}$  não é contínua na origem devido a ter-se  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

(2 val.) 2. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciável no ponto  $(1, 1)$  com matriz Jacobiana nesse ponto

$$Df(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sendo  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(x, y) = f(e^{xy}, x + y + 1)$ , calcule  $\frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0)$ .

**Resolução:** Pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(e^{xy}, x + y + 1) \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) \Big|_{(x,y)=(0,0)} \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial y}(e^{xy}, x + y + 1) \frac{\partial}{\partial x}(x + y + 1) \Big|_{(x,y)=(0,0)} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 1) = 4. \end{aligned}$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por  $f(x, y) = (\sin x)^2 + y^2$ .

**Resolução:** Temos  $Df(x, y) = [2 \sin x \cos x \quad 2y] = [\sin(2x) \quad 2y]$ . Então

$$Df(x, y) = [0 \quad 0] \iff \begin{cases} \sin(2x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e os pontos críticos são todos da forma  $(x, y) = (k\pi/2, 0)$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . A matriz Hessiana é, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} D^2 f(x, y) &= \begin{bmatrix} 2 \cos(2x) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ D^2 f(k\pi, 0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{definida positiva}) \\ D^2 f(\pi/2 + k\pi, 0) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{indefinida}), \end{aligned}$$

pelo que, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , o ponto  $(k\pi, 0)$  é de mínimo e o ponto  $(\pi/2 + k\pi, 0)$  é de sela.

4. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 ; y^2 < z < 2 + y\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de  $S$  em termos de integrais iterados da forma  $\int(\int(\int dz)dy)dx$  e da forma  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}\text{vol}(S) &= \int_0^1 \left( \int_{-1}^2 \left( \int_{y^2}^{2+y} 1 \, dz \right) dy \right) dx \\ \text{vol}(S) &= \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \left( \int_0^1 1 \, dx \right) dy \right) dz + \int_1^4 \left( \int_{z-2}^{\sqrt{z}} \left( \int_0^1 1 \, dx \right) dy \right) dz\end{aligned}$$

- (2 val.) b) Sabendo que a função densidade de massa é dada por  $f(x, y, z) = 2x$ , calcule a massa de  $S$ .

**Resolução:**

$$\text{massa}(S) = \int_0^1 \left( \int_{-1}^2 \left( \int_{y^2}^{2+y} 2x \, dz \right) dy \right) dx = \frac{9}{2}$$

- (2 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} < y < 2 - x^2 - z^2\}.$$

**Resolução:** Em coordenadas cilíndricas  $(y, \rho, \theta)$  tem-se:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = y \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

e o volume é dado por

$$\text{vol}(B) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_\rho^{2-\rho^2} \rho \, dy \right) d\rho \right) d\theta = \frac{5\pi}{6}.$$

- (3 val.) 6. Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ . Supondo que  $u = 0$  na fronteira do disco unitário  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , mostre que  $u \leq 0$  em  $D$ .

**Resolução:** Como  $u$  é uma função contínua e  $D$  é um conjunto compacto sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que a função  $u$  tem máximo e mínimo absolutos em  $D$ . Os extremos no interior do disco correspondem a pontos de estacionaridade de  $u$ , que são classificados usando a matriz Hessiana:

$$D^2u(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz Hessiana é a soma dos valores próprios e neste caso sabemos, por hipótese que é positivo, portanto pelo menos um dos valores próprios é positivo. Logo não podemos ter um ponto de máximo no interior de  $D$ . Donde podemos concluir que o máximo pertence então à fronteira de  $D$ . Como  $u = 0$  na fronteira de  $D$  este é o valor máximo de  $u$ , ou seja,  $u \leq 0$ .