



Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste - Versão 1A

14 de Janeiro 2012

Duração: 90 minutos

1. Considere o sólido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0; x^2 + y^2 \leq 1; 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

(2.5 val.)

a) Obtenha uma expressão para o volume de V usando integrais tripos da forma $\int(\int(\int \dots dx)dy)dz$.

Resolução: Os cortes de V com z igual constante, para $0 \leq z \leq 1$ são meio-discos $x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0$, independentes de z , e para $1 \leq z \leq 2$ são meio-discos $x^2 + y^2 \leq 2 - z; x \geq 0$, cujo raio depende de z . Os cortes com y igual constante para estes cortes são respetivamente $0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$ e $0 \leq x \leq \sqrt{2 - z - y^2}$. Assim uma expressão para o volume de V com a ordem de integração indicada é:

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2-z}}^{\sqrt{2-z}} \left(\int_0^{\sqrt{2-z-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz.$$

(3 val.)

b) Através de uma mudança de coordenadas apropriada calcule o momento de inércia de V relativo ao eixo Oz considerando uma densidade de massa $\kappa(x, y, z) = x$.

Resolução: O momento de inércia do enunciado é o integral triplo $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \kappa(x, y, z)$. Fazendo uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas ρ, θ, z obtém-se:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2-\rho^2} \rho^2 \cdot \rho \cos \theta \cdot \rho dz d\rho d\theta \\ &= [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \rho^4 (2 - \rho^2) d\rho \\ &= 2 \cdot \left[\frac{2}{5} \rho^5 - \frac{1}{7} \rho^7 \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{14 - 5}{35} = \frac{18}{35} \end{aligned}$$

(3 val.)

2. Calcule a massa do fio definido pelas equações $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{8} = 1$ e $y = z$ com densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{4 + x^2}$.

Resolução: Projetando a linha do fio no plano Oxy através da substituição $z = y$ na primeira equação, obtém-se a circunferência dada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$. Uma parametrização da linha é portanto $g(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 2 \sin \theta)$, com $0 < \theta < 2\pi$. A massa do fio é o integral da densidade de massa ao longo da linha L , ou seja:

$$\begin{aligned} M = \int_L \sigma &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + 4 \cos^2 \theta} \cdot \sqrt{(-2 \sin \theta)^2 + (2 \cos \theta)^2 + (2 \cos \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + 4 \cos^2 \theta} \cdot \sqrt{4 + 4 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 4 + 4 \cos^2 \theta d\theta \\ &= 8\pi + 4 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} d\theta = 8\pi + 4\pi = 12\pi. \end{aligned}$$

3. Considere os seguintes campos vetoriais

$$F(x, y) = \left(-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}, \frac{x}{x^2+(y-1)^2} \right), \quad G(x, y) = (2x+y, 2y+x),$$

e as curvas

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$$

$$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, 0 < x < 1\}, \quad C_4 \text{ é a fronteira de } [-2, 2] \times [-2, 2].$$

Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

Nota Importante: Responda apenas verdadeiro ou falso para cada uma das alíneas. Nesta pergunta não há cotação para justificações ou cálculos, mas note que cada resposta errada será cotada com **-0.5** valores.

- (0.5 val.) (a) $\oint_{C_1} F \cdot dg = 2\pi$, onde C_1 é percorrida no sentido anti-horário;
- (0.5 val.) (b) $\int_{C_3} G \cdot dg = 3$, onde C_3 é percorrida no sentido crescente de x ;
- (0.5 val.) (c) $\oint_{C_4} F \cdot dg = 2\pi$, onde C_4 é percorrida no sentido anti-horário;
- (0.5 val.) (d) $\oint_{C_4} G \cdot dg = -2\pi$, onde C_4 é percorrida no sentido horário;
- (0.5 val.) (e) $\oint_{C_2} F \cdot dg = 2\pi$, onde C_2 é percorrida no sentido anti-horário;

Resolução:

- (a) **F**
- (b) **V**
- (c) **V**
- (d) **F**
- (e) **V**

4. Sejam $F = \text{rot } G$ onde $G(x, y, z) = (0, x, y)$ e

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

- (3 val.) (a) Calcule, pelo Teorema de Stokes, o fluxo $\iint_S F \cdot n$, onde n é a normal unitária de S satisfazendo $n_z > 0$.

Resolução: Dado que $F = \text{rot } G$, aplicando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\iint_S F \cdot n = \iint_S \text{rot } G \cdot n = \oint_{\partial S} G \cdot dg.$$

Ora, $\partial S = C_0 \cup C_1$, onde

$$C_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 0\},$$

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1\},$$

e, de acordo com a normal n acima, C_0 é percorrida no sentido anti-horário e C_1 é percorrida no sentido horário quando visto do ponto $(0, 0, 10^{10})$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} G \cdot dg &= \int_0^{2\pi} (0, 2 \cos t, 2 \sin t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} (0, \cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 3\pi. \end{aligned}$$

(3 val.) (b) Aplique o Teorema da Divergência para calcular $\iint_N F \cdot n$, onde

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\},$$

e n é a normal unitária que aponta para fora de N .

Resolução: Consideremos o aberto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}.$$

Temos $\partial V = N \cup T_0 \cup T_1$, onde

$$T_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\},$$

$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}.$$

Aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\iint_N F \cdot n + \iint_{T_0} F \cdot n + \iint_{T_1} F \cdot n = \iiint_V \operatorname{div} F = \iiint_V 0 = 0.$$

Portanto,

$$\iint_N F \cdot n = - \iint_{T_0} F \cdot n - \iint_{T_1} F \cdot n.$$

Notando que $F = \operatorname{rot} G = (1, 0, 1)$, vem

$$- \iint_{T_0} F \cdot n - \iint_{T_1} F \cdot n = \iint_{T_0} F_3 - \iint_{T_1} F_3 = \operatorname{vol}_2(T_0) - \operatorname{vol}_2(T_1) = 0.$$

(3 val.) 5. Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ uma variedade-1. Dado um campo vetorial $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um campo unitário $n: C \rightarrow \mathbb{R}^2$, normal a C (i.e., $\forall (x, y) \in C$ $n(x, y) \in T_{(x, y)}^\perp C$ e $\|n(x, y)\| = 1$), define-se $\int_C F \cdot n$ como o integral de linha do campo escalar $F \cdot n$.

Sejam $R \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular tal $C = \partial R$ é uma variedade-1 conexa, $n: C \rightarrow \mathbb{R}^2$ a normal exterior unitária de R , e $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mostre que

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot n = 16(I_x + I_y),$$

onde C é percorrida no sentido anti-horário, e I_x, I_y são respetivamente os momentos de inércia de R em relação aos eixos Ox, Oy , supondo a densidade de massa constante igual a 1.

Sugestão: Aplique o Teorema de Green a um campo vetorial apropriado.

Resolução: Temos $\nabla(r^4) = (4r^3 \frac{x}{r}, 4r^3 \frac{y}{r}) = (4r^2 x, 4r^2 y)$. Seja $g: [a, b] \rightarrow C$ uma parametrização que percorre C no sentido anti-horário. Aplicando a definição de fluxo acima, obtemos

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot n = \int_a^b (4r^2(g(t))g_1(t), 4r^2(g(t))g_2(t)) \cdot n(g(t)) \|g'(t)\| dt. \quad (1)$$

Dado que $g'(t) \in T_{g(t)} C$, o vetor $(g'_2(t), -g'_1(t))$ pertence ao espaço normal $T_{g(t)}^\perp C$, pois

$$(g'_1(t), g'_2(t)) \cdot (g'_2(t), -g'_1(t)) = g'_1(t)g'_2(t) - g'_2(t)g'_1(t) = 0.$$

Como g percorre C no sentido anti-horário, o vetor $(g'_2(t), -g'_1(t))$ aponta para o exterior de R .

Concluimos que a normal exterior unitária n é dada por

$$n(g(t)) = \frac{1}{\|g'(t)\|} (g'_2(t), -g'_1(t)).$$

Substituindo em (??) vem,

$$\begin{aligned} \oint_C \nabla(r^4) \cdot n &= \int_a^b (4r^2(g(t))g_1(t), 4r^2(g(t))g_2(t)) \cdot \frac{1}{\|g'(t)\|} (g'_2(t), -g'_1(t)) \|g'(t)\| dt \\ &= \int_a^b (4r^2(g(t))g_1(t), 4r^2(g(t))g_2(t)) \cdot (g'_2(t), -g'_1(t)) dt \\ &= \int_a^b 4r^2(g(t)) [g_1(t)g'_2(t) - g_2(t)g'_1(t)] dt \\ &= \oint_C P dx + Q dy, \end{aligned}$$

onde $P(x, y) = -4(x^2 + y^2)y$ e $Q(x, y) = 4(x^2 + y^2)x$. Aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 16 \iint_R (x^2 + y^2) = 16(I_x + I_y).$$