

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEAMB, LEMAT, LQ, MEBIOL, MEQ,
TESTE 2 – 15 DE DEZEMBRO DE 2007,
DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Resolução abreviada

- (3 val.) 1. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < 1; 0 < z < 1 + x + y; x > 0; y > 0\}.$$

Calcule o volume de V usando um integral iterado da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

Resolução:

$$\text{vol}_3(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1+x+y} dz \right) dy \right) dx = \frac{5}{6}.$$

- (3 val.) 2. Use a mudança de variáveis $u = x + y; v = y - x^3$ para calcular a massa do conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x + y < 2; 0 < y - x^3 < 1\},$$

cuja densidade de massa é a função $\sigma(x, y) = 1 + 3x^2$.

Resolução: Sendo o Jacobiano da mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (u, v)$ dado por $1 + 3x^2$, o Jacobiano da mudança $(u, v) \mapsto (x, y)$ será dado por $\frac{1}{1 + 3x^2(u, v)}$ e, portanto,

$$M = \int_D \sigma = \int_1^2 \left(\int_0^1 dv \right) du = 1.$$

- (3 val.) 3. Calcule a área da superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2; x > 0; y > 0; z < 1\}$.

Resolução: Considere-se a parametrização

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2); \quad 0 < \rho < 1; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Sendo

$$D_\rho g(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 2\rho) \\ D_\theta g(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0),$$

temos

$$\|D_\rho g \times D_\theta g\| = \rho \sqrt{4\rho^2 + 1}$$

e, portanto,

$$\text{vol}_2(S) = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho \sqrt{4\rho^2 + 1} d\theta d\rho = \frac{\pi}{24} (5^{3/2} - 1).$$

4. Considere o campo $F(x, y, z) = (e^{xy} \cos z, x^2 z, xy)$ e as superfícies

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0\}$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0; y^2 + z^2 < 1\},$$

orientadas com normais com primeira componente positiva.

a) Calcule o fluxo do rotacional de F através de N , usando o teorema de Stokes. (3 val.)

Resolução: Sendo $\nu = (1, 0, 0)$ a normal em N , o fluxo do rotacional de F em N será dado pela circulação de F no bordo de N no sentido dado pelo caminho

$$\gamma(t) = (0, \cos t, \sin t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e, portanto,

$$\iint_N \text{rot}F \cdot \nu = \oint_{\partial N} F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (\cos(\sin t), 0, 0) \cdot (0, -\sin t, \cos t) dt = 0.$$

b) Mostre que o fluxo do rotacional de F em M é igual ao fluxo do rotacional de F em N . (1 val.)

Resolução: Sendo o bordo de M o mesmo que o bordo de N , temos

$$\iint_M \text{rot}F \cdot \nu = \oint_{\partial M} F \cdot d\gamma = \oint_{\partial N} F \cdot d\gamma = \iint_N \text{rot}F \cdot \nu.$$

5. Considere a superfície $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > 0\}$ e o campo vectorial (3 val.)

$$F(x, y, z) = \left(z^2 x, \frac{1}{3} y^3 - \tan(z), x^2 z + 3 \right).$$

Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de M segundo a normal com terceira componente positiva.

Resolução: Considerem-se os conjuntos

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1; z > 0\}$$

e

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1; z = 0\}.$$

Dado que $\text{div}F = x^2 + y^2 + z^2$ e $F \cdot \nu = -3$, em B , pelo teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned} \iint_M F \cdot \nu &= \iiint_V \text{div}F - \iint_B F \cdot \nu \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \sin \phi dr d\phi d\theta + 3\pi = \frac{17\pi}{5} \end{aligned}$$

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Mostre que o trabalho de $F = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ao longo da circunferência centrada na origem e de raio igual a um é nulo. (1 val.)

Resolução: Aplicando o teorema de Green ao campo F no círculo de raio igual a um e centro na origem, obtemos

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = 0,$$

em que D é o círculo e C a respectiva fronteira.

- (3 val.) 7. Seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $B_\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| \leq \rho\}$ com $0 < \rho \leq 1$, e considere a função

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} u.$$

Mostre que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I(\rho) = 2\pi u(0, 0).$$

Resolução: Dado que ∂B_ρ é a circunferência de raio ρ e centrada na origem, temos

$$I(\rho) = \int_0^{2\pi} u(\rho \cos t, \rho \sin t) dt.$$

Sabendo que u é uma função contínua, existem $\bar{t} \in [0, 2\pi]$ e $\underline{t} \in [0, 2\pi]$ tais

$$u(\rho \cos \underline{t}, \rho \sin \underline{t}) = \min_{0 \leq t \leq 2\pi} u(\rho \cos t, \rho \sin t)$$

$$u(\rho \cos \bar{t}, \rho \sin \bar{t}) = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} u(\rho \cos t, \rho \sin t)$$

e, portanto,

$$2\pi u(\rho \cos \underline{t}, \rho \sin \underline{t}) \leq I(\rho) \leq 2\pi u(\rho \cos \bar{t}, \rho \sin \bar{t}),$$

ou seja,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I(\rho) = 2\pi u(0, 0).$$