

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC

Teste 2 - 15 de Junho de 2009 - 09h - Versão 1

Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

(2 val.) 1. (a) Mostre que a região

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1\},$$

é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução: M é o conjunto de nível zero da função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1$. A respectiva derivada $\nabla F = (\frac{x}{2}, 2y, 2z)$, tem característica um em todos os pontos de \mathbb{R}^3 , excepto na origem, $(0, 0, 0)$. Como a origem não pertence a M , porque $F(0, 0, 0) = -1 \neq 0$, concluímos que M é uma variedade e que $\dim(M) = 3 - 1 = 2$.

(2 val.) (b) Determine um vector tangente (não nulo) a M no ponto $(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Resolução: Dado que $\nabla F(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{1}{2}, 1, \sqrt{2})$, os vectores tangentes a M no ponto $(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ são então dados pelas soluções da equação

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (\frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_1 + u_2 + \sqrt{2}u_3 = 0.$$

Um vector tangente não nulo é, por exemplo, $u = (-2, 1, 0)$.

(2 val.) (c) Determine, caso existam, os extremos da função $f(x, y, z) = x + y$ na variedade M .

Resolução: A variedade M é um conjunto compacto e a função f é contínua pelo que, do teorema de Weierstrass, concluímos que f tem (pelo menos) um máximo e um mínimo absolutos em M . Sendo f de classe C^1 os extremos de f em M , (extremos condicionados) são soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F \\ F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \frac{x}{2} \\ 1 = \lambda 2y \\ 0 = \lambda 2z \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Da terceira equação, temos $\lambda = 0$ ou $z = 0$. Mas fazendo $\lambda = 0$, da primeira equação obtemos $1 = 0$. Assim, temos $z = 0$ e, das primeiras duas equações, obtemos $x = 4y$.

Assim, teremos,

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 4y \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

As soluções deste sistema correspondem só a dois pontos,

$$P_1 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right); \quad P_2 = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right),$$

pelo que um é o máximo e outro é o mínimo de f em M .

Como $f(P_2) = -\sqrt{5} < f(P_1) = \sqrt{5}$, então P_1 é o máximo e P_2 é o mínimo.

2. Seja

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - 3(x^2 + y^2)}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(2 val.)

(a) Escreva uma expressão para o volume de D na forma $\int (\int (\int \dots dx) dy) dz$

Resolução: Temos que $0 \leq z \leq 2$. Os cortes de D com os planos $z = \text{const}$ são dados por

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad \text{se } 0 \leq z \leq 1$$

$$A_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{4 - z^2}{3}, x \geq 0, y \geq 0 \right\}, \quad \text{se } 1 \leq z \leq 2.$$

Temos então

$$V_D = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2 - y^2}} dx \right) dy \right) dz + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4 - z^2}{3}}} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4 - z^2}{3} - y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

(2 val.)

(b) Calcule a massa de D , supondo que a densidade de massa é $\sigma(x, y, z) = z$.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas temos

$$M_D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_\rho^{\sqrt{4 - 3\rho^2}} z \rho \, dz \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (\rho(4 - 3\rho^2) - \rho^3) \, d\rho = \frac{\pi}{4}.$$

3. Considere os seguintes campos vectoriais: $H(x, y) = (4xe^{x^2+3y}, 6e^{x^2+3y})$ e $G(x, y) = \left(\frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}, \frac{-(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} \right)$ e seja C o quadrado com vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$, percorrido no sentido horário.

(1 val.)

- (a) Calcule $\oint_C H \cdot dg$.

Resolução: O campo é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 . Uma vez que

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = 12x e^{x^2+3y} = \frac{\partial H_2}{\partial x},$$

concluimos que H é um campo fechado e, portanto, pode ser um campo gradiente, ou seja, pode existir um campo escalar ϕ tal que $H = \nabla\phi$.

De facto, das equações

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 4xe^{x^2+3y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 6e^{x^2+3y}, \end{cases}$$

facilmente se conclui que $\phi(x, y) = 2e^{x^2+3y}$.

O integral de um campo gradiente em qualquer curva fechada é zero pelo que $\oint_C H \cdot dg = 0$.

(1 val.)

- (b) Calcule $\oint_C G \cdot dg$.

Resolução: Note-se que G é um exemplo de campo fechado mas não gradiente no seu domínio, $D_G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$.

Aplicando o teorema de Green ao campo G no domínio limitado pela circunferência

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\},$$

e pelo quadrado C , concluimos que

$$\oint_C G \cdot dg = \oint_{\Gamma} G \cdot dg.$$

Uma parametrização de Γ é

$$g(s) = (1 + \cos(s), 1 - \sin(s)), \quad s \in [0, 2\pi],$$

pelo que,

$$\oint_C G \cdot dg = \oint_{\Gamma} G \cdot dg = \int_0^{2\pi} (-\sin(s), -\cos(s)) \cdot (-\sin(s), -\cos(s)) ds = 2\pi.$$

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + (x^2 + y^2)^2, z < 2\},$$

orientada com normal unitária, n_S , com terceira componente positiva.

(3 val.)

(a) Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (e^{y^2}, e^{x^2+3z}, 2)$ através de S .

Resolução Calculemos o fluxo pelo teorema da divergência. Consideremos a região

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + (x^2 + y^2)^2 < z < 2\},$$

para a qual $\partial D = S \cup T$, onde a “tampa” T é dada por

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Uma vez que $\operatorname{div}(F) = 0$ obtemos, do teorema da divergência,

$$\iint_S F \cdot n_S = \iint_T F \cdot n_T = \iint_T 2 = 2\pi.$$

(2 val.)

(b) Calcule, usando o teorema de Stokes, o trabalho do campo $G = (y, 0, 0)$ pela fronteira (bordo) ∂S de S , percorrida no sentido induzido por n_S .

Resolução: Observemos primeiro que o bordo de S coincide com o bordo de T ,

$$\partial S = \partial T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 2\}$$

orientado no sentido anti-horário para um observador no ponto $(0, 0, 1)$. Esta orientação corresponde à normal unitária em T , usada na alínea anterior, $n_T = (0, 0, 1)$. Uma vez que $\operatorname{rot}(G) = (0, 0, -1)$, obtemos

$$\oint_{\partial S} G \cdot dg = \oint_{\partial T} G \cdot dg = \iint_T \operatorname{rot}(G) \cdot n_T = \iint_T -1 = -\pi.$$

(3 val.)

5. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto regular e $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2 em \mathbb{R}^3 . Mostre, usando o teorema da divergência, a seguinte identidade

$$\iiint_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, dx dy dz = \iint_{\partial D} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right),$$

onde n é a normal unitária exterior de ∂D e $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Resolução: Da identidade $\varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ e de identidades análogas para y e z concluímos que $\varphi \Delta \psi = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) - \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi$ e portanto

$$\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi).$$

Então

$$\begin{aligned} \iiint_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, dx dy dz &= \iiint_D \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi) \, dx dy dz = \\ &= \iint_{\partial D} (\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi) \cdot n = \\ &= \iint_{\partial D} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right). \end{aligned}$$