Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 12 de Junho de 2017 - 9h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC, MEBiom e MEFT

**Apresente e justifique todos os cálculos**

## Resolução Abreviada

1. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 = 3, x + 2y + z = 4\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que $A$ é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

### Resolução:

Seja $F(x,y,z) = (2x^2 + y^2 - 3, x + 2y + z - 4 = 0)$. $A$ é o conjunto de nível de $F$ correspondente ao valor $0$. Temos,

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4x & 2y & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz só não tem caracterísitica máxima (igual a $2$) se $x = y = 0$, mas tais pontos não pertencem a $A$. Logo, $A$ é uma variedade-1.

(1 val.) (b) Determine um vector não nulo tangente a $A$ no ponto $(1,1,1)$.

### Resolução:

Temos

$$DF(1,1,1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, o vector $(1,-2,3)$ é perpendicular às duas linhas da matriz e é portanto tangente a $A$ em $(1,1,1)$.

(2 val.) (c) Mostre que, numa vizinhança aberta de $(1,1,1)$, $A$ pode ser descrito pelo gráfico de uma função de classe $C^1$, na forma $(x,z) = g(y)$. Determine $g'(1)$.

### Resolução:

Temos

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x,z)}(1,1,1) = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita, concluímos que localmente $A$ é um gráfico da forma $(g_1(y), y, g_2(y))$ onde $g = (g_1, g_2)$ é uma função de classe $C^1$ definida numa vizinhança aberta de $1$. Temos ainda nessa vizinhança

$$\frac{d}{dy} F(g_1(y), y, g_2(y)) = 0,$$

pelo que $\nabla g(1) = (-1/2, -3/2)$.

(2 val.) (d) Determine os pontos de $A$ onde a função $h(x,y,z) = 4x + 2y$ atinge os valores máximo e mínimo.

## Resolução:

Usando multiplicadores de Lagrange, teremos que nesses pontos

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3 &= 0, \\ x + 2y + z - 4 &= 0, \\ (4,2,0) &= \lambda_1(4x, 2y, 0) + \lambda_2(1,2,1). \end{cases}$$

As soluções são $a = (1,1,1)$ e $b = (-1,-1,7)$. $A$ é obtida pela intersecção de um elipsóide com um plano e é compacta; como $h(1,1,1) = 6 > h(-1,-1,7) = -6$ concluímos que $a$ é o ponto de máximo e $b$ o ponto de mínimo.

(3 val.) 2. Considere o campo vectorial

$$G(x,y) = \left( \frac{4x^3}{x^4 + y^2} + y, \frac{2y}{x^4 + y^2} + x \right).$$

Calcule o trabalho de $G$ ao longo do caminho $\alpha(t) = (t^2, 1+t), t \in [0,1]$.

## Resolução:

Temos $g = \nabla\phi$, onde $\phi(x,y) = \log(x^4 + y^2) + xy$ é de classe $C^1$ no domínio de $G$. Logo,

$$\int G \cdot d\alpha = \phi(\alpha(1)) - \phi(\alpha(0)) = \log(5) + 2 - \log(1) - 0 = \log(5) + 2.$$

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 - \sqrt{x^2 + z^2}, 0 < y < 1\}.$$

(1 val.) (a) Calcule a área de $S$.

## Resolução:

Uma parametrização para a superfície $S$ é dada por $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, 1 - \rho, \rho \operatorname{sen}\theta)$ com $0 < \rho < 1$ e $0 < \theta < 2\pi$, logo a área é dada por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\det Dg^(t)(\rho,\theta) Dg(\rho,\theta)}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}\rho\, d\rho\, d\theta = \sqrt{2}\pi.$$

(3 val.) (b) Calcule o fluxo do campo $F(x,y,z) = (2e^y xz, x^2+z^2, 3-z^2e^y)$ através de $S$ no sentido da normal unitária cuja segunda componente é positiva.

## Resolução:

Usando o Teorema da Divergência com

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \leq 1 - \sqrt{x^2+z^2}, 0 < y < 1\}$$

temos

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot n_e$$

onde $n_e$ denota a normal exterior a $\partial D$. Como $\operatorname{div} F = 0$ e $\partial D = S \cup T$, onde $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 1, y = 0\}$, obtemos

$$\int_S F \cdot n_e = -\int_T F \cdot n_T = \int_T x^2 + z^2 \, dx \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2},$$

pois $n_T = (0,-1,0)$. Finalmente, como a normal unitária cuja segunda componente é positiva é a normal exterior, concluímos que o resultado final é $\dfrac{\pi}{2}$.

(3 val.) 4. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo

$$H(x,y,z) = (\operatorname{sen} z + e^{x+z}, xz + y^3, e^y \cos x)$$

ao longo da circunferência $C$ dada pelas equações $x^2+y^2 = 4$ e $z = -1$, percorrida no sentido anti-horário quando vista por um observador colocado no ponto $(0,0,10)$.

## Resolução:

Considerando a superfície $S$ dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, z = -1\}$$

temos $\partial S = C$. Usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_C H \cdot dg = \int_S \operatorname{rot} H \cdot n = \int_S z = -\text{área}(S) = -4\pi,$$

pois $\operatorname{rot} H = (\,\cdot\,, \,\cdot\,, z)$, a normal unitária compatível com o sentido de $C$ é $n = (0,0,1)$ e $z = -1$ em $S$.

(3 val.) 5. Sejam $M$ e $N$ variedades-2 compactas em $\mathbb{R}^3$ que não se intersectam. Mostre que se $p \in M, q \in N$ são pontos onde a distância entre $M$ e $N$ é mínima, então

$$(T_pM)^\perp = (T_qN)^\perp.$$

## Resolução:

Seja $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. O quadrado da distância a $p$ é a função dada por $d_p^2(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ cujo gradiente é $2(x-a, y-b, z-c) = 2(x, y, z) - 2p$. Do mesmo modo, se $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, o quadrado da distância a $q$ é a função dada por $d_q^2(a, b, c) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ cujo gradiente é $-2(x-a, y-b, z-c) = 2(a, b, c) - 2q$.

Suponhamos agora que $p \in M, q \in N$ são pontos onde a distância entre $M$ e $N$ é mínima. Como sabemos do estudo dos extremos condicionados, temos de ter então, respectivamente,

$$\nabla d_p^2(q) \in (T_qN)^\perp, \;\; \nabla d_q^2(p) \in (T_pM)^\perp.$$

Logo,

$$0 \neq p - q \in (T_pM)^\perp \cap (T_qN)^\perp,$$

e como ambos os espaços normais têm dimensão 1, isso implica que $(T_pM)^\perp = (T_qN)^\perp$.