Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 12 de Junho de 2017 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC, MEBiom e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução Abreviada

1. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que A é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

Resolução:

Seja $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9$. A é o conjunto de nível de F correspondente ao valor 0. Ora,

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 4y & 2z \end{bmatrix},$$

só não tem característica máxima (igual a 1) no ponto $(0, 0, 0)$ que não pertence a A. Logo, A é variedade-2.

(1 val.) (b) Determine os pontos de A em que o vector $(3, 2, 2)$ é normal a A.

Resolução:

Procuramos $(x, y, z) \in A$ tal que, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(3, 2, 2) = \lambda\nabla F(3, 2, 2) = \lambda(6x, 4y, 2z).$$

Pondo, $x = 1/(2\lambda) = y, z = 1/\lambda$ obtemos, substituindo em $F(x, y, z) = 0$, $\lambda = \pm 1/2$. Assim, temos os pontos $(1, 1, 2)$ e (-1,-1,-2).

(2 val.) (c) Mostre que, numa vizinhança aberta de $(0, 2, 1)$, A pode ser descrito pelo gráfico de uma função de classe C^1, na forma $z = g(x, y)$. Determine $\nabla g(0, 2)$.

Resolução:

Temos

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0, 2, 1) = 2 \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita, existe uma função de classe C^1 definida numa vizinhança aberta de $(0, 2)$, $z = g(x, y)$, tal que

$$F(x, y, g(x, y)) = 0,$$

nessa vizinhança. Logo,

$$DF(0,2,1) \cdot Dg(0,2) = 0,$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial g}{\partial y}(0,2) \end{bmatrix} = 0,$$

o que fornece $\nabla g(0,2) = (0,-4)$.

(2 val.) (d) Determine os pontos de A onde a função $h(x,y,z) = 2y + z$ atinge os valores máximo e mínimo.

Resolução:

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, procuramos pontos tais que

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z^2 &= 9, \\ (0,2,1) &= \lambda(6x, 4y, 2z) \end{cases}$$

Obtemos $x = 0, y = z = 1/(2\lambda)$, o que fornece os pontos $(0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $(0, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. O primeiro é o máximo e o segundo o mínimo. Note-se que A é um elipsóide e é compacta.

(3 val.) 2. Considere o campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} - 3y, \frac{2y}{x^2+y^2} + 3x \right).$$

Seja E a elipse definida pela equação $2x^2 + 3y^2 = 1$. Calcule o trabalho de F ao longo de E percorrida no sentido anti-horário.

Resolução:

Seja $F = G + H$ onde

$$G(x,y) = (-3y, 3x), \; H(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} \right).$$

Temos que $H = \nabla\left(\log(x^2+y^2)\right)$. Logo o trabalho de H ao longo da elipse é nulo. Por outro lado

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 6,$$

e sendo G de classe C^1 (em $\mathbb{R}^2$), aplicando o teorema de Green, sendo U a área limitada por E,

$$\oint_E G = \int\int_U \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dxdy = 6 \times \text{área}(U) = \sqrt{6}\pi.$$

Logo, $\oint_E H = \sqrt{6}\pi + 0 = \sqrt{6}\pi$.

(1 val.) 3. Calcule a massa total do fio

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x + y = 3\}$$

com densidade de massa por unidade de comprimento dada por $\sigma(x,y,z) = \dfrac{3}{\sqrt{1+z^2}}$.

Resolução:

Considere a parametrização de L dada por $g(t) = (\cos t, 3 - \cos t, \operatorname{sen} t)$ com $0 < t < 2\pi$. A massa total do fio é dada por

$$\mathcal{M} = \int_L \sigma = \int_0^{2\pi} \sigma(g(t)) \parallel g'(t) \parallel dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}} \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt = 6\pi.$$

4. Considere a superfície

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 1 = y^2 + z^2, 0 < x < 1\}.$$

orientada com a normal unitária n cuja primeira componente é negativa. Seja $G(x,y,z) = (2x, -y, 1-z)$. Calcule o fluxo $\int_B G \cdot n$, usando:

(3 val.) (a) o Teorema da Divergência;

Resolução:

A superfície B é um hiperbolóide. Para usar o Teorema da Divergência devemos considerar o conjunto

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 1 \geq y^2 + z^2, 0 < x < 1\}.$$

Como $\operatorname{div} F = 0$ e $\partial D = B \cup T_0 \cup T_1$ onde

$$T_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : k + 1 \geq y^2 + z^2, x = k\} \quad \text{com} \quad k = 0, 1$$

obtemos

$$0 = \int_D \operatorname{div} G = \int_{\partial D} G \cdot n = \int_B G \cdot n_e + \int_{T_0} G \cdot n_0 + \int_{T_1} G \cdot n_1.$$

As normais unitárias a T_0 e T_1 são dadas por $n_0 = (-1, 0, 0)$ e $n_1 = (1, 0, 0)$, logo $G \cdot n_{0|T_0} = -2x_{|T_0} = 0$ e $G \cdot n_{1|T_1} = 2x_{|T_1} = 2$, portanto

$$\int_B G \cdot n_e = -2\text{área}(T_1) = -4\pi.$$

(3 val.) (b) o Teorema de Stokes.

Resolução:

Uma vez que o domínio de G é $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto em estrela e $\operatorname{div} G = 0$ podemos concluir que existe um campo vectorial $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $G = \operatorname{rot} A$. O campo A satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_3}{\partial y} - \dfrac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\[2ex] \dfrac{\partial A_1}{\partial z} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\[2ex] \dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y} = 1 - z \end{cases}$$

Escolhendo $A_2 = 0$ obtemos, por exemplo, a solução $A = (zy - y, 0, 2xy)$. Uma vez que $\partial B = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ onde

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : k + 1 = y^2 + z^2, x = k\} \quad \text{com} \quad k = 0, 1,$$

temos, usando o Teorema de Stokes,

$$\int_B G \cdot n = \int_B \operatorname{rot} A \cdot n = \int_{\partial B} G \cdot dg = \int_{\Gamma_0} G \cdot dg_0 + \int_{\Gamma_1} G \cdot dg_1.$$

A regra da mão direita diz-nos que a circunferência Γ_0 deve ser percorrida no sentido anti-horário e a circunferência Γ_1 no sentido horário quando vistas do ponto $(100, 0, 0)$. Usando as parametrizações $g_0(t) = (0, \cos t, \operatorname{sen} t)$ e $g_1(t) = (1, \sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $0 < t < 2\pi$, para Γ_0 e Γ_1, respectivamente, obtemos, finalmente

$$\int_B G \cdot n = \int_{\Gamma_0} G \cdot dg_0 + \int_{\Gamma_1} G \cdot dg_1 = 0 + \int_0^{2\pi} A(g_1(t)) g_1'(t)\, dt = -4\pi.$$

(3 val.) 5. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ e $L \subset \mathbb{R}^n$ variedades de dimensão $\dim K = k$, $\dim L = l$, tal que $k + l > n$. Mostre que se

$$(T_pK)^\perp \cap (T_pL)^\perp = \{0\}, \quad \forall p \in K \cap L,$$

então $K \cap L$ é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução:

Seja $p \in K \cap L$. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U \cap V$, tal que localmente K e L são dadas por conjuntos de nível de funções de classe C^1, respectivamente, $F_K : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ e $F_L : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-l}$ sendo que,

$$\{\nabla F_{K_1}, \ldots, \nabla F_{K_{n-k}}\}$$

é base de $(T_pK)^\perp$ e que

$$\{\nabla F_{L_1}, \ldots, \nabla F_{L_{n-l}}\}$$

é base de $(T_pL)^\perp$. Então, $K \cap L \cap U \cap V$ será um conjunto de nível de $F : U \cap V \to \mathbb{R}^{n-(k+l-n)}$ com $F = (F_K, F_L)$. Por hipótese, a característica de DF é máxima e igual a $n - (k + l - n)$ numa vizinhança aberta de p. Logo, $K \cap L$ é uma variedade de dimensão $k + l - n$.