*Instituto Superior Técnico*
*Departamento de Matemática*

# Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 07 de Junho de 2019 - 9h - v1
Duração: 1h30m

## Resolução abreviada

1. Considere o conjunto $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + xz + z^2 = 2;\ x + z = 1\}$.

[2.0] a) Mostre que $L$ é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

**Resolução**:

$L$ é uma variedade de dimensão um desde que a matriz

$$\begin{bmatrix} 2x+z & 2y & 2z+x \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tenha característica máxima. Supondo que não, ter-se-ia

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x + z = 2z + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

e, tendo em conta a definição de $L$, obter-se-ia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

o que é impossível.

Portanto, $L$ é uma variedade de dimensão um.

[1.0] b) Determine uma base do espaço tangente a $L$ no ponto $(0, 1, 1)$.

**Resolução**:

O espaço normal a $L$ no ponto $(0, 1, 1)$ é gerado pelos vectores $(1, 2, 2)$ e $(1, 0, 1)$. O correspondente espaço tangente é dado pelos vectores que verificam o sistema de equações

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

ou seja, pelos vectores da forma $y(2, 1, -2)$, $y \in \mathbb{R}$. Assim, uma base para o espaço tangente a $L$ no ponto $(0, 1, 1)$ é o conjunto $\{(2, 1, -2)\}$.

[2.0] 2. Considere os rectângulos inscritos numa circunferência de raio $R > 0$. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, determine o comprimento e a largura daquele que tem a maior área possível.

**Resolução**:

Sejam, respectivamente, $x \geq 0$ metade do comprimento e $y \geq 0$ metade da largura de um tal rectângulo. A correspondente área é dada por $4xy$. Estando inscrito na circunferência de raio $R > 0$ e centro na origem de $\mathbb{R}^2$ ter-se-á $x^2 + y^2 = R^2$. Assim, a solução do problema resulta da resolução do sistema

$$\begin{cases} 4y = 2\lambda x \\ 4x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - x)(4 + 2\lambda) = 0 \\ 4x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 4x = 2\lambda y \\ 2x^2 = R^2 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 4 + 2\lambda = 0 \\ x = -y \\ 2x^2 = R^2. \end{cases}$$

Do primeiro caso resulta $y = x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$.

No segundo caso tem-se $x = -y$ e, tendo em conta que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, conclui-se que não há solução.

Assim, o rectângulo pretendido é o quadrado de lado $\sqrt{2}R$.

Note-se que o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ é compacto e a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 4xy$ é contínua. Pelo teorema de Weierstrass, $f$ tem máximo e mínimo absolutos em $C$. O mínimo absoluto de $f$ em $C$ é atingido nos pontos em que $f$ é nula, ou seja, nos pontos $(0, R)$ e $(R, 0)$.

[3.0] 3. Mostre que a equação

$$e^{xz} + x^2yz = 1$$

define $z$ como função, de classe $C^1$, de $x$ e $y$ em torno do ponto $(1, 0, 0)$.

Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$ , $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 0)$.

**Resolução**:

Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função de classe $C^1$ definida por $F(x, y, z) = e^{xz} + x^2yz - 1$. Assim, tem-se

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} ze^{xz} + 2xyz & x^2z & xe^{xz} + x^2y \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 0) = 1 \neq 0$. O teorema da função implícita garante que a equação dada define $z$ como função, de classe $C^1$, de $x$ e $y$ em torno do ponto $(1, 0, 0)$, ou seja, $z = z(x, y)$.

Sendo $F(x, y, z(x, y)) = 0$, da aplicação da regra da cadeia, obtém-se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

de onde se conclui que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = 0$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = 0$.

Dado que $F$ é classe $C^2$, da aplicação da regra da cadeia à segunda equação do sistema anterior, obtém-se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Sendo $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2xz$, conclui-se que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 0) = 0$.

[3.0] 4. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = \Big(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, z\Big).$$

Calcule o trabalho realizado por $F$ ao longo da linha dada pelas equações $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $z = 0$ e percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 100)$.

**Resolução**:

Seja $E$ a elipse dada pelas equações $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , $z = 0$ e percorrida tal como descrito.

Fazendo

$$R(x, y, z) = \left( \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, 0 \right)$$

e

$$G(x, y, z) = \left( \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, z \right),$$

tem-se $F = R + G$.

O campo $G$ é conservativo e o respectivo potencial escalar é a função

$$\phi(x, y, z) = \log \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + z^2/2 + K \ , \ K \in \mathbb{R}.$$

O campo $R$ é um exemplo de campo fechado que não é conservativo. O trabalho realizado por $R$ ao longo da circunferência $C$ dada por $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ , $z = 0$, percorrida uma vez no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 0, 100)$ é igual a $2\pi$.

Assim, aplicando o teorema de Stokes ao campo $R$ e à superfície $S$ definida por

$$z = 0 \, , \ (x-1)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \, , \ \frac{x^2}{4} + y^2 < 1,$$

conclui-se que

$$\int_E R \cdot dg = -2\pi.$$

O mesmo se conclui tendo em conta que $E$ e $C$ são homotópicas.

Dado que $G$ é conservativo tem-se

$$\int_E F \cdot dg = -2\pi.$$

Em alternativa, pode verificar-se que o campo $F$ é fechado e o respectivo trabalho em $C$, percorrida no sentido horário, é $-2\pi$. Usando o teorema de Stokes em $S$ ou homotopia, conclui-se o mesmo para a elipse $E$.

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ z - x^2 - y^2 = 1, \ \ z < 2\}$$

orientada em relação à normal unitária $N$ cuja terceira componente é negativa.

[3.0] a) Seja $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por $H(x, y, z) = (yz^2, y^2 z, y^3)$. Calcule, usando o teorema da divergência, o fluxo do campo $\operatorname{rot} H$ através de $S$ no sentido da normal $N$.

**Resolução**:

Seja $B$ a superfície definida por $z = 2$ , $x^2 + y^2 < 1$.

Pelo teorema da divergência tem-se

$$\iint_S \operatorname{rot} H \cdot N = - \iint_B \operatorname{rot} H \cdot N_{ext}.$$

Sendo $\operatorname{rot} H(x, y, z) = (2y^2, 2yz, -z^2)$ e como em $B$ se tem $N_{ext} = (0, 0, 1)$, conclui-se que

$$\iint_S \operatorname{rot} H \cdot N = - \iint_B \operatorname{rot} H \cdot N_{ext} = 4 \operatorname{vol}_2(B) = 4\pi.$$

[3.0] b) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (x, y, xy + z^3)$. Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo $\operatorname{rot} F$ através de $S$ no sentido da normal $N$.

**Resolução**:

Sendo $\partial S$ a linha dada por $z = 2$, $x^2 + y^2 = 1$ e definida pelo caminho

$$g(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 2),\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

tem-se

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N = \oint_{\partial S} F \cdot dg = \int_0^{2\pi} (\cos t, -\operatorname{sen} t, -\cos t \operatorname{sen} t + 8) \cdot (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0) dt = 0.$$

[3.0] 6. Sejam $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe $C^2$ e $B$ a bola centrada na origem e de raio um. Supondo que $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ em $\partial B$, mostre que

$$\iiint_B \varphi \operatorname{div}(\nabla \psi) = \iiint_B \psi \operatorname{div}(\nabla \varphi).$$

**Resolução**:

Notando que

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) = \varphi \operatorname{div}(\nabla \psi) - \psi \operatorname{div}(\nabla \varphi),$$

tendo em conta que $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ em $\partial B$ e aplicando o teorema da divergência, obtém-se a igualdade enunciada.