Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 07 de Junho de 2019 - 11h - v1
Duração: 1h30m

Resolução abreviada

1. Considere o conjunto $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - x^2 z + z^2 = 2\}$.

[2.0] a) Mostre que N é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

Resolução:

N é uma variedade de dimensão dois desde que a matriz

$$\begin{bmatrix} 2x - 2xz & 2y & 2z - x^2 \end{bmatrix}$$

tenha característica máxima. Supondo que não, ter-se-ia

$$\begin{cases} 2x(1-z) = 0 \\ y = 0 \\ 2z = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} z = 1 \\ y = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases}$$

Tendo em conta a definição de N, no primeiro caso ter-se-ia $0 = 2$ e no outro $-1 = 0$. Portanto, N é uma variedade de dimensão dois.

***

[1.0] b) Determine uma base do espaço tangente a N no ponto $(0,1,1)$.

Resolução:

O vector $(0,2,2)$ gera o espaço normal a N no ponto $(0,1,1)$ e, assim, o espaço tangente a N nesse ponto é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que satifaz a equação $2y + 2z = 0$, ou seja, é o conjunto dos vectores da forma $(x, y, -y)$ com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Portanto, uma base deste espaço é o conjunto $\{(1,0,0), (0,1,-1)\}$.

***

[2.0] 2. Seja $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ \ x + z = 1\}$. Determine o ponto de E cuja terceira coordenada é a maior possível, usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Resolução:

Pretende-se determinar o ponto em que a função, de classe C^1, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = z$ e restringida a E, tem o seu máximo. Note-se que E é compacto.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange o ponto pretendido é solução do sistema

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 y \\ 1 = \lambda_2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ y = 0 \\ 1 = \lambda_2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 0 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ \lambda_1 = 0 \\ 1 = \lambda_2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Do primeiro caso resultam os pontos $(-1,0,2)$ e $(1,0,0)$. O outro caso não tem soluções. Assim, o ponto pretendido é $(-1,0,2)$.

***

[3.0] 3. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x, y) = \Big(\frac{1}{1+x^2}, e^{xy}\Big).$$

Mostre que g não é injectiva mas é localmente invertível em torno do ponto $(1, 0)$ com inversa de classe C^1. Calcule a derivada de uma inversa de g no ponto $(\frac{1}{2}, 1)$.

Resolução:

A função g não é injectiva porque $g(-1, 0) = g(1, 0) = (\frac{1}{2}, 1)$.

No entanto, sendo

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2x}{(1-x^2)^2} & 0 \\ & \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\det Dg(1, 0) = \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

e, portanto, g é localmente invertível em torno do ponto $(1, 0)$ com inversa de classe C^1.

Seja g^{-1} a inversa de g que ao ponto $(\frac{1}{2}, 1)$ faz corresponder o ponto $(1, 0)$. Assim, tem-se

$$Dg^{-1}(\frac{1}{2}, 1) = (Dg(1, 0))^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

***

4. Considere a linha

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + (y-1)^2 = 1, \ y \geq 1\}.$$

[2.0] a) Usando o teorema de Green, calcule o trabalho realizado pelo campo $H(x, y) = (-y, x)$ ao longo da linha Γ percorrida no sentido horário.

Resolução:

Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 < 1, \ y > 1\}$ e R o segmento de recta entre o ponto $(-1, 1)$ e o ponto $(1, 1)$. Aplicando o teorema de Green obtém-se

$$\int_\Gamma H \cdot dg = 2 \operatorname{vol}_2(D) - \int_R H \cdot dg$$

em que Γ é percorrida no sentido anti-horário.

Sendo D um semi-círculo de raio um, obtém-se

$$\int_\Gamma H \cdot dg = \pi - \int_0^1 (-1, 2t-1) \cdot (2, 0) dt = \pi + 2.$$

No sentido horário, o trabalho pretendido é $-\pi - 2$.

***

[1.0] b) Calcule o trabalho realizado pelo campo $R(x,y) = (3y^2, 6xy)$ ao longo de Γ no sentido anti-horário.

Resolução:

O campo R é conservativo com potencial escalar $\phi(x,y) = 3xy^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Portanto, o trabalho pretendido é a diferença de potencial $\phi(-1,1) - \phi(1,1) = -6$.

***

5. Considere a superfície

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z - 4 = \sqrt{x^2+y^2}, \ 5 < z < 6\}.$$

[3.0] a) Calcule, pelo teorema da divergência, o fluxo do campo $H(x,y,z) = (e^y, y+x, -z)$ através de T no sentido da normal cuja terceira componente é negativa.

Resolução:

Sejam

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 4 + \sqrt{x^2+y^2}, \ 5 < z < 6\} \\ A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5\,,\ x^2+y^2 < 1\} \\ B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 6\,,\ x^2+y^2 < 4\}. \end{aligned}$$

Dado que $\operatorname{div} H = 0$, aplicando o teorema da divergência, obtém-se

$$0 = \iint_T H \cdot N + \iint_A H \cdot N_{ext} + \iint_B H \cdot N_{ext}$$

em que N é a normal em T cuja terceira componente é negativa.

Em A tem-se $H \cdot N_{ext} = 5$ e em B tem-se $H \cdot N_{ext} = -6$.

Assim,

$$\iint_T H \cdot N = 19\pi.$$

***

[3.0] b) Calcule, usando o teorema de Stokes, o trabalho realizado pelo campo

$$F(x,y,z) = (z(y+x), 0, e^y)$$

ao longo da linha descrita pelas equações $x^2 + y^2 = 1$, $z = 5$ e percorrida uma vez no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0,0,100)$.

Resolução:

Seja $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5\,,\ x^2+y^2 < 1\}$ a superfície plana orientada com a normal $N = (0,0,1)$. Note-se que o bordo de A é a linha dada. Seja L essa linha. Note-se também que $\operatorname{rot} F = H$ em que H é o campo dado na alínea anterior.

Assim, aplicando o teorema de Stokes, obtém-se

$$\int_L F \cdot dg = \iint_A \operatorname{rot} F \cdot N = \iint_A H \cdot N = -5\pi.$$

***

[3.0] 6. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola centrada na origem, $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 tal que $\phi = 0$ em ∂B e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^2.

Mostre que

$$\iiint_B \nabla\phi \cdot \operatorname{rot} F = 0.$$

Resolução:

Para qualquer campo vectorial $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, tem-se

$$\operatorname{div}(\phi H) = \phi \operatorname{div} H + \nabla\phi \cdot H.$$

Fazendo $H = \operatorname{rot} F$, aplicando o teorema da divergência e tendo em conta que $\phi = 0$ em ∂B obtém-se a igualdade enunciada.