Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 06 de Janeiro de 2020 - 14h - v1
Duração: 1h30m

Resolução abreviada

[2.0] 1. Mostre que a equação $z^5 + 2xz^3 + yz = 1$ define z como função de x e y, de classe C^1, em alguma vizinhança do ponto $(0,0,1)$ e calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

Resolução: Fazendo $F(x,y,z) = z^5+2xz^3+yz$ tem-se $DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2z^3 & z & 5z^4+6xz^3+y \end{bmatrix}$ e portanto $DF(0,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Sendo $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) = 5 \neq 0$, conclui-se, pelo teorema da função implícita, que a equação $z^5 + 2xz^3 + yz = 1$ define z como função de x e y, ou seja, $z = z(x,y)$, de classe C^1, em alguma vizinhança do ponto $(0,0,1)$ e tem-se $F(x,y,z(x,y)) = 1$ nessa vizinhança.

Usando a regra da cadeia obtem-se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1) + \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{2}{5}.$$

De modo semelhante obtem-se

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1) + \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -\frac{1}{5}.$$

[2.0] 2. Mostre que o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^5 + 2xz^3 + yz = 1\}$ é uma variedade, indicando a respectiva dimensão, e determine uma base do espaço tangente a M no ponto $(0,0,1)$.

Resolução: Fazendo $F(x,y,z) = z^5+2xz^3+yz$ tem-se $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 1\}$ e $DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2z^3 & z & 5z^4+6xz^3+y \end{bmatrix}$. A característica de $DF(x,y,z)$ será nula se e só se $y = 0$ e $z = 0$. Mas os pontos da forma $(x,0,0)$ não se encontram em M porque $F(x,0,0) = 0 \neq 1$. Assim, a característica de $DF(x,y,z)$ é um e, portanto, M é uma variedade e $\dim(M) = 3 - 1 = 2$.

Dado que $DF(0,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ o vetor $(2,1,5)$ gera o espaço normal a M no ponto $(0,0,1)$. O espaço tangente a M nesse ponto será gerado pelos vetores $(0,-5,1)$ e $(1,-2,0)$.

[3.0] 3. Determine o máximo da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x$ no conjunto dado pelas equações $y^2 + z^2 = 1$, $x + z = 1$.

Resolução: Usando o método dos multiplicadores de Lagrange tem-se

$$\begin{cases} 1 = \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 y \\ 0 = 2\lambda_1 z + \lambda_2 \\ y^2 + z^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

de onde se obtêm os pontos $(2,0,-1)$ e $(0,0,1)$. Assim, o máximo de f é 2 atingido no ponto $(2,0,-1)$.

4. Sejam $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\} \to \mathbb{R}^2$ os campos vetoriais dados por

$$F(x,y) = (2xy^3 + x, 3x^2y^2),$$
$$G(x,y) = \left(-\frac{y-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \right).$$

Determine, justificando, se os seguintes campos vetoriais são conservativos:

[1.0] a) $F(x,y)$

Resolução: O campo F é conservativo porque é o gradiente da função escalar $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x,y) = x^2y^3 + \dfrac{x^2}{2} + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

[2.0] b) $F(x,y) - G(x,y)$

Resolução: O campo $F - G$ não é conservativo porque o respetivo integral de linha ao longo da circunferência dada por $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ e percorrida no sentido positivo é $2\pi \neq 0$.

[1.0] 5. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ \alpha < z < 1\}$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < 1$. Parametrize S e calcule a respectiva área em função de α.

Resolução: Usando coordenadas cilíndricas tem-se $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho)$ em que $\alpha < \rho < 1$ e $0 < \theta < 2\pi$. Assim, a área de S é dada pelo integral

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_\alpha^1 \|D_\rho g \times D_\theta g\| d\rho \right) d\theta = \sqrt{2}\pi(1-\alpha^2).$$

[3.0] 6. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 tal que $F(x,y,0) = (-2y, 2x, e^{x^2+y^2})$ e seja $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2, z > 0\}$. Calcule o fluxo $\int_P \mathrm{rot}\, F \cdot n$, onde n é uma normal unitária a P tal que $n_3 > 0$.

Resolução: Pelo teorema de Stokes tem-se

$$\int_P \mathrm{rot}\, F \cdot n = \int_{\partial P} F \cdot dg$$

em que n e g verificam a regra da mão direita. Fazendo $g(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, 0)$ com $0 < t < 2\pi$, obtem-se

$$\int_P \mathrm{rot}\, F \cdot n = \int_{\partial P} F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_0^{2\pi} 4dt = 8\pi.$$

[3.0] 7. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1,\ 0 < y < 2\}$$

e o campo vetorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (2xy + \mathrm{sen}(y^2), y - y^2, \cos(x^2) - z)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$, onde n é uma normal unitária a S tal que $n(1,1,0) = (1,0,0)$.

Resolução: Fazendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1,\ 0 < y < 2\}$ tem-se $\partial V = S \cup B_0 \cup B_2$ em que

$$B_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1,\ y = 0\}, \quad B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1,\ y = 2\}$$

Dado que $n(1, 1, 0) = (1, 0, 0)$ então a normal unitária em S é exterior relativamente a V. Sendo $\operatorname{div} F = 0$, pelo teorema da divergência, tem-se

$$\int_S F \cdot n = \int_V \operatorname{div} F - \int_{B_0} F \cdot n_{\text{ext}} - \int_{B_2} F \cdot n_{\text{ext}} = 2 \operatorname{vol}_2(B_2) = 2\pi.$$

[3.0] 8. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ um domínio regular, $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1 e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 que se anula em ∂V. Mostre que se tem

$$\int_V \nabla\phi \cdot \operatorname{rot} F = 0.$$

Resolução: Notando que $\operatorname{div}(\phi \operatorname{rot} F) = \nabla\phi \cdot \operatorname{rot} F + \phi \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \nabla\phi \cdot \operatorname{rot} F$ e usando o teorema da divergência, tem-se

$$\int_V \nabla\phi \cdot \operatorname{rot} F = \int_V \operatorname{div}(\phi \operatorname{rot} F) = \int_{\partial V} \phi \operatorname{rot} F \cdot n_{\text{ext}} = 0.$$