Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 04 de Janeiro de 2016 - 14h (versão 1)
Duração: 90 minutos
Resolução abreviada

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y(1 + x^2) - z^4 + 3 = 0\}.$$

[1.0] a) Mostre que M é uma variedade, e indique a sua dimensão.

Resolução: M é um conjunto de nível da função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = y(1 + x^2) - z^4$. A matriz derivada

$$DF(x, y, z) = [2xy,\ 1 + x^2,\ -4z^3]$$

tem entradas contínuas, portanto $F \in C^1$. Tem-se ainda

$$\forall (x, y, z) \in M \qquad \operatorname{car} DF(x, y, z) = 1,$$

pois $1 + x^2 \geq 1 > 0$. Portanto M é uma variedade, e a dimensão de M é

$$\dim (M) = 3 - \operatorname{car} DF = 3 - 1 = 2.$$

[1.0] b) Indique uma base do espaço tangente a M no ponto $(1, -1, 1)$.

Resolução:

$$DF(1, -1, 1) = [-2,\ 2,\ -4]$$

portanto $\{(-2, 2, -4)\}$ é uma base do espaço normal a M no ponto $(1, -1, 1)$. Tem-se

$$-2x + 2y - 4z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y - 2z \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1).$$

Assim, uma base do espaço tangente a M no ponto $(1, -1, 1)$ é dada por $\{(1, 1, 0),\ (-2, 0, 1)\}$.

[2.0] c) Mostre que o sistema de equações $\begin{cases} y(1 + x^2) - z^4 + 3 &= 0 \\ y^3 - z + 2 &= 0 \end{cases}$ determina x e y em função de z, ou seja, $(x, y) = f(z)$, com $f \in C^1$, numa vizinhança do ponto $(1, -1, 1)$, e calcule $Df(1)$.

Resolução: O sistema é equivalente à equação $F(x, y, z) = (0, 0)$, onde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é definida por $F(x, y, z) = (y(1 + x^2) - z^4 + 3, y^3 - z + 2)$. Calcule-se

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xy & 1 + x^2 & -4z^3 \\ 0 & 3y^2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad DF(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se: (1) $F \in C^1$; (2) $F(1, -1, 1) = (0, 0)$; (3) $\det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -6 \neq 0$. Assim, pelo teorema da função implícita, o sistema determine x e y em função de z, $(x, y) = f(z)$, com $f \in C^1$, numa vizinhança do ponto $(1, -1, 1)$. Tem-se ainda que a matriz derivada da função implícita é dada por:

$$Df(1) = -\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

[2.0] 2. Determine os extremos absolutos da função f dada por $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ no conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}.$$

Resolução: Pelo teorema de Weierstrass f (contínua) tem mínimo e máximo absoluto em D (compacto). f tem um ponto estacionário $(0,0) \in D$. Procura-se os outros candidatos a pontos de extremo de f na fronteira de D pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 4x = \lambda.2x \\ 2y = \lambda.2(y+1) \\ x^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad (x=0) \vee (\lambda = 2) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} (x=0) \wedge ((y=1) \vee (y=-3)) \\ \vee \\ (y=-2) \wedge (x = \pm\sqrt{3}) \end{array}$$

Fazendo uma comparação dos valores de f:

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,-3)$	$(\sqrt{3},-2)$	$(-\sqrt{3},-2)$
$f(x,y)$	0	1	9	10	10

concluí-se que f tem mínimo absoluto 0 em $(0,0)$ e máximo absoluto 10 em $(\pm\sqrt{3}, -2)$.

3. Considere os campos vetoriais

$$F(x,y) = \left(\frac{2xy}{1+x^2}, \log(1+x^2)\right) \ ; \quad G(x,y) = (0,x).$$

[1.0] a) Determine qual dos dois campos é conservativo e indique o respetivo potencial escalar.

Resolução: O campo G não é conservativo porque não é fechado: $1 = \frac{\partial G_2}{\partial x} \neq \frac{\partial G_1}{\partial y} = 0$.
O campo F é conservativo porque é o gradiente da função escalar $\phi(x,y) = y\log(1+x^2)$.

[3.0] b) Use o teorema de Green para calcular o trabalho realizado por cada um dos campos G e $F - G$, ao longo da linha definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$ e descrita no sentido positivo.

Resolução: Seja L a linha definida pela equação $x^2+y^2 = 1$. Aplicando o teorema de Green ao campo G no disco D definido por $x^2 + y^2 < 1$, tem-se:

$$\int_L G = \mathrm{vol}_2(D) = \pi.$$

Dado que F é conservativo, tem-se

$$\int_L (F-G) = -\int_L G = -\pi.$$

4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2;\ x^2+y^2 < 1\}.$$

[1.0] a) Calcule a área de S;

Resolução: Consideremos a seguinte parametrização para S:

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho^2), (\rho,\theta) \in]0,1[\times]0,2\pi[.$$

Temos

$$V_2(S) = \iint_S 1 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\det Dg^t Dg}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2} d\rho\, d\theta$$
$$= 2\pi\left[\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{12}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\big(5^{3/2}-1\big).$$

[2.0] b) Calcule $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ é a normal unitária tal que $n_z < 0$ e F é o campo

$$F(x,y,z) = (xe^{z^2}, ye^{z^2}, 2xy).$$

Resolução: Pelo Teorema de Stokes $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$, onde γ é uma parametrização que percorre ∂S no sentido obtido de $\mathbf{n}$ pela regra da mão direita. Neste caso, o sentido obtido é o horário quando visto de cima. A parametrização $\alpha(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1), \theta \in [0, 2\pi]$, tem o sentido contrário ao pretendido, portanto

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} &= -\int_{\partial S} F \cdot d\alpha \\
&= -\int_0^{2\pi} (e^1 \cos\theta, e^1 \operatorname{sen}\theta, 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} 0\, d\theta = 0.
\end{aligned}$$

5. Considere o campo $F(x,y,z) = (x^3y^2e^z, -x^2y^3e^z, 1+x^2)$ e o sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1,\ 0 < z < 1 - (x^2+y^2)^2\}.$$

[2.0] a) Calcule $\iint_{\partial V} F \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a V.

Resolução: Pelo Teorema da divergência,

$$\iint_{\partial V} F \cdot \mathbf{n} = \iiint_V \operatorname{div}(F) = 0,$$

pois $\operatorname{div}(F) = 3x^2y^2e^z - 3x^2y^2e^z = 0$.

[2.0] b) Calcule $\iint_S F \cdot \mathbf{n}$, onde S é a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1,\ z = 1 - (x^2+y^2)^2\},$$

e $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a V.

Resolução: Temos $\partial V = S \cup T$, onde $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1,\ z = 0\}$, logo, pela alínea anterior,

$$\begin{aligned}
\iint_S F \cdot \mathbf{n} &= \iint_{\partial V} F \cdot \mathbf{n} - \iint_T F \cdot \mathbf{n} = -\iint_T F \cdot \mathbf{n} \\
&= -\iint_T F \cdot (0,0,-1) = \iint_T (1+x^2) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r^2\cos^2\theta) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\theta)\, d\theta = \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}$$

[3.0] 6. Seja $|D| = \sup\{\|x-y\| : x, y \in D\}$ o diâmetro do conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$.
Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1, e (D_k) uma sucessão de domínios regulares contendo um dado ponto p, tais que $\lim_{k\to\infty} |D_k| = 0$. Mostre que

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\operatorname{vol}_3(D_k)} \iint_{\partial D_k} F \cdot \nu,$$

sendo ν a normal unitária e exterior a D_k. Conclua que $\operatorname{div} F$ é independente do sistema de coordenadas.

Resolução: Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

Sendo f contínua, dado $\epsilon > 0$ existe k tal que, para todo $X \in D_k$, se tem $|f(X) - f(p)| < \epsilon$. Portanto,

$$\frac{1}{\mathrm{vol}_3(D_k)} \left| \iiint_{D_k} (f - f(p)) \right| < \epsilon,$$

ou seja,

$$f(p) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}_3(D_k)} \iiint_{D_k} f.$$

Aplicando o teorema da divergência ao campo F e fazendo $f = \operatorname{div} F$, tem-se

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}_3(D_k)} \iiint_{D_k} \operatorname{div} F = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}_3(D_k)} \iint_{\partial D_k} F \cdot \nu.$$

Dado que o integral é invariante perante mudanças de variáveis conclui-se que $\operatorname{div} F$ é independente do sistema de coordenadas.