Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 8 de Novembro de 2014 - 8h

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1 val.) a) Estude a continuidade de f.

R.: Todos os polinómios são funções contínuas. A função definida pela expressão $\operatorname{sen}(x^2)$ é contínua porque é a composição de um polinómio com a função seno, que é contínua em $\mathbb{R}$. Portanto f é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$, pois é um quociente de funções contínuas cujo denominador não se anula nestes pontos. No ponto $(0,0)$ a função não é contínua porque não existem todos os limites direccionais: por exemplo, temos $f(x,0) = \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}$ para qualquer $x \neq 0$, mas também $f(0,0) = 0$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = 1 ,$$

pelo que não existe $\lim_{x\to 0} f(x,0)$.

(2 val.) b) Estude a diferenciabilidade da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = y^2 f(x,y)$.

R.: A função g é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R} \setminus \{(0,0\}$ por razões análogas às invocadas na alínea anterior. Para verificar se f é diferenciável em $(0,0)$ começamos por calcular as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \ ; \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \ . \end{aligned}$$

Portanto g é diferenciável no ponto $(0,0)$ porque tomando $Dg(0,0) = [0 \ 0]$ temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k) - g(0,0) - Dg(0,0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 ,$$

como as desigualdades seguintes demonstram:

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(h,k) - g(0,0) - Dg(0,0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| &= \left| \frac{k^2 \operatorname{sen}(h^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} \right| \leq \left| \frac{k^2 h^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \right| \\ &= \left| \frac{k^2}{h^2+k^2} \right| \left| \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| |h| \leq |h| \ . \end{aligned}$$

(2 val.) 2. Seja $g(u,v) = f(u+v, u-v)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável e

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(2,0) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(2,0) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(2,0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(2,0) = 1 \ .$$

Calcule $Dg(1,1)$.

R.: Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função diferenciável definida por $h(u,v) = (u+v, u-v)$. Tem-se $g = f \circ h$ e, em qualquer ponto (u,v),

$$Dh(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Logo, pelo Teorema da Derivação da Função Composta,

$$\begin{aligned} Dg(1,1) &= Df(h(1,1))Dh(1,1) = Df(2,0)Dh(1,1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

3. Considere a função $f(x,y) = \operatorname{sen}^2 x + y^2$.

(2 val.) a) Calcule os pontos críticos de f.

R.: f é uma função de classe C^2 cuja derivada é

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2 \operatorname{sen} x \cos x & 2y \end{bmatrix} .$$

Os pontos críticos são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} ,$$

ou seja, são os pontos $(k\pi, 0)$ e $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ com $k \in \mathbb{N}$.

(2 val.) b) Classifique os pontos críticos de f.

R.: Como f é de classe C^2 podemos tentar classificar os pontos críticos recorrendo à matriz Hessiana de f, que é

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Nos pontos críticos temos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} D^2 f(k\pi, 0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} , \\ D^2 f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

$D^2 f(k\pi, 0)$ é uma matriz definida positiva e $D^2 f(k\pi + \frac{\pi}{+}2, 0)$ é indefinida, e por isso os pontos $(k\pi, 0)$ são pontos de mínimo e os pontos $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ são pontos de sela.

4. Considere o conjunto

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y \leq 1\ ;\ 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de X em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dy \right) dz \right) dx$.

R.:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_x^1 dy \right) dz + \int_x^1 \left(\int_z^1 dy \right) dz \right) dx.$$

(2 val.) (b) Calcule o integral $\int_X f$, em que $f(x,y,z) = y$, usando um único integral triplo.

R.:

$$\int_X f = \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_0^y y\, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 y^2\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=x}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x^3}{3}\, dx = \frac{1}{3} - \left[\frac{x^4}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(2 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do conjunto seguinte:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < y^2 + z^2;\ 0 < x < 4 - y^2 - z^2\ ;\ y > 0;\ z > 0\}.$$

R.: Usando coordenadas cilíndricas em torno do eixo dos xx, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(B) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 \left(\int_0^{4-\rho^2} \rho\, dx \right) d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_1^2 \left(4\rho - \rho^3 \right) d\rho = \frac{\pi}{2} \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 \\
&= \frac{9\pi}{8}.
\end{aligned}$$

(2 val.) 6. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x - y < x + y < 1\}.$$

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o integral $\int_A f$ em que $f(x,y) = x - y$.

R.: Consideremos novas coordenadas $(u,v) = g(x,y) = (x+y, x-y)$. A função $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear e é bijetiva pois $\det Dg = -2 \neq 0$, logo define uma *transformação de coordenadas*. Pelo teorema de mudança de variáveis, temos

$$\iint_A f dxdy = \iint_{g(A)} \left(f \circ g^{-1} \right) |\det D(g^{-1})| dudv = \int_0^1 \left(\int_0^u \frac{v}{2}\, dv \right) du$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{v^2}{4} \right]_{v=0}^{v=u} du = \int_0^1 \frac{u^2}{4}\, du = \left[\frac{u^3}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

(3 val.) 7. Seja $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1, e $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de conteúdo nulo. Prove que $g(D)$ tem conteúdo nulo.

Nota: Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo se, dado $\epsilon > 0$, existir uma coleção finita de intervalos $\{I_k\}_{k=1}^N$, tais que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^N I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N \mathrm{vol}(I_k) < \epsilon.$$

R.: Da definição segue que D está contido no interior de uma bola B, compacta.

Seja $\{I_k\}$ tal que $D \subset \bigcup_{k=1}^N I_k \subset B$ e $\sum_{k=1}^N \mathrm{vol}(I_k) < \epsilon$. Subdividindo, se necessário, os intervalos $\{I_k\}$, podemos supor que o rácio de quaisquer das suas arestas é inferior a 2 e, portanto, diâmetro$(I_k) \le C_n \sqrt[n]{\mathrm{vol}(I_k)}$, onde C_n só depende de n.

Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$ segue do Teorema de Lagrange que

$$g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y}) = \nabla g_i(\mathbf{c_i}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \qquad i = 1, \dots, n.$$

onde $\mathbf{c_i}$ é um ponto intermédio no segmento de reta que une $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Como g é C^1 e B é compacta, as derivadas parciais de g são limitadas e portanto existe uma constante $K > 0$ tal que,

$$\begin{aligned} |g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})| &\le ||\nabla g_i(\mathbf{c_i})||\,||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \\ &\le K||\mathbf{x} - \mathbf{y}||, \qquad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I_k$, vem

$$|g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})| \le K \cdot \text{diâmetro}(I_k) \le C_n K \sqrt[n]{\mathrm{vol}(I_k)}.$$

Concluímos que existe um intervalo $J_k \supset g(I_k)$ tal que

$$\mathrm{vol}(J_k) \le (C_n K)^n \,\mathrm{vol}(I_k).$$

e portanto obtemos uma coleção $\{J_k\}$ tal que

$$g(D) \subset \bigcup_{k=1}^N J_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N \mathrm{vol}(J_k) < (C_n K)^n \epsilon.$$

Como $(C_n K)^n$ só depende de n, B e g, o resultado segue.