Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 5 de Novembro de 2011 - 12h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+6y^2}.$$

Resolução:

Dado que $\left|\frac{xy^2}{x^2+6y^2}\right| \leq \frac{|x|y^2}{6y^2} = \frac{|x|}{6}$, então, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+6y^2} = 0$.

(2 val.) 2. Seja $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{Kx^3+y^4}{2x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Determine K de modo que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 5$.

Resolução:

Notando que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Kt^3}{2t^3} = \frac{K}{2},$$

então $K = 10$.

(2 val.) 3. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $Df(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)$, sabendo que

$$h(x,y) = f(u(x,y),v(x,y))\,, \quad u(x,y) = e^{-x}\,, \quad v(x,y) = e^y.$$

Resolução:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial u}(1,1)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(1,1)\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = -3.$$

(3 val.) 4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = 12y + 6y^2 - 2x^2 + x^4.$$

Resolução:

Das equações

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = -4x + 4x^3 = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 12 + 12y = 0 \end{cases}$$

concluímos que os pontos críticos de h são $(0,-1), (-1,-1), (1,-1)$.

Para os classificar recorremos à matriz hessiana

$$H_h(x,y) = \begin{bmatrix} -4 + 12x^2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

e facilmente se conclui que $(0,-1)$ não é um ponto de extremo de h e que os pontos $(-1,-1), (1,-1)$ são pontos de mínimo de h.

5. Considere o conjunto

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{x+y} + \operatorname{sen}(x)\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.

Resolução:

L é uma variedade-2 por ser o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1 e definida por $f(x,y) = e^{x+y} + \operatorname{sen}(x)$.

Alternativamente, L é uma variedade-2 por ser o conjunto de nível zero da função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, definida por $F(x,y,z) = z - e^{x+y} - \operatorname{sen}(x)$ e cuja derivada

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} -e^{x+y} - \cos(x) & -e^{x+y} & 1 \end{bmatrix}$$

apresenta característica igual a um em todos os pontos de L.

(2 val.) (b) Determine a equação do plano tangente a L no ponto $(0,0,1)$.

Resolução:

No ponto $(0,0,1)$ o espaço normal é gerado pelo vector $DF(0,0,1) = (-2,-1,1)$ e, portanto, o plano tangente será dado por

$$(x, y, z-1) \cdot (-2,-1,1) = 0 \Leftrightarrow z - y - 2x = 1.$$

(2 val.) (c) Mostre que L é o gráfico de uma função $x = f(y,z)$ numa vizinhança do ponto $(0,0,1)$ e calcule $Df(0,1)$.

Resolução:

Sendo $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0,1) = -2 \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita L é o gráfico referido e temos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

e, portanto, $Df(0,1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(2 val.) 6. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto definido pelas equações

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

Determine o ponto de M que apresenta a maior coordenada x.

Resolução:

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, temos

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda x + \mu \\ 0 = -2\lambda y \\ 0 = \lambda + \mu \\ z = x^2 + y^2 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

Da segunda equação obtemos $y = 0$ ou $\lambda = 0$. No caso em que $\lambda = 0$, da terceira e da primeira equações concluímos que $\mu = 0$ e $\mu = 1$. Assim, devemos ter apenas $y = 0$. Da quarta e quinta equações temos $z = x^2$ e $x + z = 2$, ou seja, $x^2 + x - 2 = 0$ e $z = x^2$. Portanto, os pontos candidatos são $(-2, 0, 4)$ e $(1, 0, 1)$. É claro que o ponto pretendido é $(1, 0, 1)$.

(3 val.) 7. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Supondo que $u = 0$ na fronteira do disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, mostre que $u = 0$ em D.

Resolução:

Para obter a classificação máxima (3 val.):

A função u tem máximo e mínimo absolutos em $\overline{D}$ porque este conjunto é compacto.

Note-se que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ é o traço da matriz hessiana de u, ou seja, é a soma dos respectivos valores próprios.

Supondo que o determinante da matriz hessiana não é nulo, então os respectivos valores próprios são simétricos. Assim, a função u não tem pontos de extremo relativo em D.

Portanto os extremos de u deverão estar na fronteira do disco. Dado que na fronteira a função u é nula, concluímos que $u = 0$ em D.