Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXECEPTO LEB, LEBM, LEFT, LEMAT, LEQ, LMAC, LQ
TESTE 1 – 28 DE ABRIL DE 2007 – VERSÃO 1

Apresente e justifique todos os cálculos
duração: 90 minutos

Resolução

(3 val.) (1) Considere a função

$$h(x,y) = \begin{cases} 5 - 2\,\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ a, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine, justificando, o valor de a para que h seja contínua na origem.

Resolução:

$$|h(x,y) - 5| = 2|\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}| \leq 2|\frac{x(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}| = 2|x| \to 0,$$

quando $(x,y) \to (0,0)$. Logo, se $a = 5$ então f será contínua em $(0,0)$.

(2 val.) (2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(x,y) = (xy, x+y, 2x),$$

e a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$, de classe C^1, tal que

$$Dg(1,2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada de $g \circ f$ no ponto $(1,1)$, segundo o vector $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Resolução:

$$D_v g \circ f(1,1) = Dg(f(1,1))Df(1,1)v = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 10/\sqrt{2}.$$

(3 val.) (3) Determine e classifique os pontos críticos do campo escalar dado por

$$F(x,y,z) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{3}{2}y^2 + \sqrt{2}yz + z^2.$$

Resolução:

$$\nabla F(x,y,z) = (x^2 - 1, 3y + \sqrt{2}z, \sqrt{2}y + 2z).$$

Logo, $\nabla F(x,y,z) = 0$ nos pontos $p_\pm = (\pm 1, 0, 0)$.

A Hessiana nestes pontos será

$$H_f(p_\pm) = \begin{bmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Os respectivos valores próprios são as raízes de $(\pm 2 - \lambda) \cdot ((3-\lambda)(2-\lambda) - 2) = 0$. Assim, $H_f(p_+)$ tem valores próprios positivos $\lambda = 2, 4, 1$ e p_+ é um mínimo local. Por outro lado, $H_f(p_-)$ tem valores próprios $\lambda = -2, 4, 1$ e p_- é um ponto em sela.

(4) O tempo t e as coordenadas (u, v) de um ponto em movimento no plano satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} u^2 + v^2 &= e^{2t} + 1 \\ u \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} u) &= t. \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, u_0, v_0) = (1, 1, e)$, uma função de classe C^1, dada por (2 val.)

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)).$$

Resolução:

Seja, $F(t, u, v) = (u^2 + v^2 - e^{2t} - 1, u \sin(\frac{\pi}{2} u) - t)$. Então $F(1, 1, e) = (0, 0)$ e $(1, 1, e)$ é uma solução do sistema. Temos,

$$DF(1, 1, e) = \begin{bmatrix} -2e^2 & 2 & 2e \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\det \frac{\partial F}{\partial(u, v)}(1, 1, e) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2e \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2e \neq 0,$$

e o teorema da função implícita garante que existe um caminho $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, com t numa vizinhança aberta de $t = 1$, tal que $F(t, \alpha(t)) = 0$.

b) Calcule $\alpha'(1)$. (1.5 val.)

Resolução:

Temos $F(t, \alpha(t)) = 0$, numa vizinhança de $t = 1$. Logo,

$$\frac{d}{dt}_{|t=1} F(t, \alpha(t)) = \begin{bmatrix} -2e^2 & 2 & 2e \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1'(1) \\ \alpha_2'(1) \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja $\alpha'(1) = (1, e - \frac{1}{e})$.

(5) Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x = y, x > 0\}.$$

a) Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão. (2 val.)

Resolução:

A é a porção com $x > 0$ do conjunto de nível zero da função

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 - z, x - y).$$

Temos

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem característica máxima ($= 2$). Logo, A é uma variedade de dimensão 1.

(1.5 val.) b) Determine um vector tangente a A no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Resolução:

temos,

$$DF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As linhas desta matriz geram o espaço normal a A no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Logo, por exemplo, o vector $(1,1,2)$ é tangente a A nesse ponto.

(2 val.) c) Parametrize A.

Resolução:

Tomemos $g(x) = (x, x, 2x^2)$ com $x > 0$. Temos, $F(g(x)) = 0$, pelo que g parametriza A. Note-se que g é uma parametrização: é injectiva, a sua inversa é contínua e $g'(x) = (1,1,2x) \neq 0, \forall x > 0$.

(3 val.) (6) Mostre que a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ transforma curvas ortogonais que passam no ponto $(0,1)$ em curvas ortogonais que passam no ponto $(-1,0)$.

Resolução:

Temos,

$$DF(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}.$$

Sejam $\alpha(t), \beta(t)$ dois caminhos com $\alpha(0) = \beta(0) = (0,1)$, que se cruzam ortogonalmente neste ponto, ou seja com $\alpha'(0) \cdot \beta'(0) = 0$. As suas imagens serão dois caminhos $(F \circ \alpha)(t), F(\circ\beta)(t)$ que se intersectam em $(-1,0) = F(0,1)$.

As respectivas derivadas (velocidades) nesse ponto serão dadas por

$$(F \circ \alpha)'(0) = DF(0,1)\alpha'(0)$$
$$(F \circ \beta)'(0) = DF(0,1)\beta'(0).$$

e deverão ser vectores ortogonais, ou seja,

$$(F \circ \alpha)'(0) \cdot (F \circ \beta)'(0) = 0.$$

De facto, temos

$$\begin{aligned}
(F\circ\alpha)'(0)\cdot(F\circ\beta)'(0) &= \alpha'(0)^T DF(0,1)^T DF(0,1)\beta'(0)\\
&= \alpha'(0)\begin{bmatrix} 0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\beta'(0)\\
&= 4\alpha'(0)\cdot\beta'(0)\\
&= 0.
\end{aligned}$$