

Cálculo Diferencial e Integral II  
Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC  
Teste 1 - 18 de Abril de 2009 - 11h - Versão 1  
Duração: 90 minutos

**Resolução abreviada**

1. Considere a seguinte função definida em  $\mathbb{R}^2$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^3 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Estude  $f$  quanto à continuidade.

**Resolução:** A função  $f$  é claramente contínua em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (é obtida a partir de funções contínuas por operações elementares). Assim, basta estudar  $f$  na origem.

Dado que  $|\operatorname{sen}(z)| \leq 1$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ , teremos

$$\left| (x + y)^3 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right| = |(x + y)^3| \cdot \left| \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right| \leq |x + y|^3,$$

e, portanto,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Assim, por definição,  $f$  é contínua na origem.

(b) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ .

**Resolução:** Por definição

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{|h|} \right) = 0 \end{aligned}$$

2. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar diferenciável.

- (a) Supondo que a derivada de  $f$  no ponto  $(2, 4)$  na direcção do vector  $(1, 1)$  é 5, e na direcção do vector  $(-1, 2)$  é 4, mostre que  $\nabla f(2, 4) = (2, 3)$ .

**Resolução:** Denotemos  $\nabla f(2, 4) = (a, b)$  e vejamos que  $a = 2$  e  $b = 3$ . Dado que  $f$  é diferenciável temos

$$\begin{aligned}D_{(1,1)}f(2, 4) &= (a, b) \cdot (1, 1) = 5 \\D_{(-1,2)}f(2, 4) &= (a, b) \cdot (-1, 2) = 4,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}a + b &= 5 \\-a + 2b &= 4\end{aligned}$$

e, portanto,  $a = 2$  ;  $b = 3$ .

- (b) Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $g(t) = f(t, t^2)$ . Justifique que  $g$  é diferenciável e determine  $g'(2)$ .

**Resolução:** A função  $g$  é a composição de  $f$  e  $h(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dado que  $f$  e  $h$  são diferenciáveis,  $g$  é também diferenciável pelo teorema da função composta. Além disso, deste teorema segue-se que

$$g'(t) = \nabla f(t, t^2) \cdot (1, 2t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da alínea anterior, sabemos que  $\nabla f(2, 4) = (2, 3)$  e, portanto

$$g'(2) = \nabla f(2, 4) \cdot (1, 4) = (2, 3) \cdot (1, 4) = 14.$$

3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função  $f(x, y) = x^2e^{-x^2} - y^2$ .

**Resolução:** Os pontos de estacionaridade de  $f$  são aqueles em que o gradiente de  $f$  é nulo, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y = 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} 2x(1-x^2)e^{-x^2} &= 0 \\ -2y &= 0, \end{aligned}$$

donde se conclui que os pontos são  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ .

Para classificar os pontos de estacionaridade, calculamos a matriz Hessiana de  $f$  num ponto genérico

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2e^{-x^2}(1-4x^2+2x^4) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Classificação do ponto  $(0, 0)$ . Neste caso temos

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo  $(0, 0)$  é um ponto de sela de  $f$  (dado que os valores próprios de  $H_f(0, 0)$  têm sinal oposto).

(b) Classificação do ponto  $(1, 0)$ .

$$H_f(1, 0) = \begin{bmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo  $(1, 0)$  é um ponto de máximo local para  $f$  (dado que os valores próprios de  $H_f(1, 0)$  são negativos).

(c) Classificação do ponto  $(-1, 0)$ .

$$H_f(-1, 0) = \begin{bmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

então  $(-1, 0)$  é também um ponto de máximo local para  $f$ .

4. (a) Mostre que a equação  $y + y^3 = x^2 + 2xz + 2z^2$  define localmente  $y$  como função de  $x$  e  $z$  (isto é  $y = f(x, z)$ ) numa vizinhança do ponto  $(0, 0, 0)$ , onde  $f$  é uma função de classe  $C^1$ .

**Resolução:** Aplicamos o teorema da função implícita à função

$$F(x, y, z) = y + y^3 - x^2 - 2xz - 2z^2.$$

Temos que  $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $F(0, 0, 0) = 0$  e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)|_{(0,0,0)} = [1 + y^3]|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0.$$

Logo existe uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^3$  de  $(0, 0, 0)$ , uma vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$  e uma função  $f \in C^1(U)$  tal que

$$\{(x, y, z) \in V : F(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, z) = y, (x, z) \in U\}.$$

(b) Calcule a derivada de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ .

**Resolução:** Dado que em cada ponto  $(x, z) \in U$

$$F(x, f(x, z), z) = 0$$

ou, equivalentemente

$$f(x, z) + f(x, z)^3 - x^2 - 2xz - 2z^2 = 0,$$

derivando em relação a  $x$  e a  $z$ , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, z) + 3f(x, z)^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, z) - 2x - 2z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, z) + 3f(x, z)^2 \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) - 2x - 4z = 0$$

Sendo  $f(0, 0) = 0$  concluímos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) = 0$ .

(c) Prove que  $f$  possui um mínimo local no ponto  $(0, 0)$ .

**Resolução:** Calculemos a matriz Hessiana de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ . Para tal voltamos a derivar o sistema obtido acima. Assim para cada ponto  $(x, z) \in U$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, z) + 6f(x, z)^2 \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, z) \right]^2 + 3f(x, z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, z) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, z) + 6f(x, z)^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, z) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) + 3f(x, z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, z) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, z) + 6f(x, z)^2 \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) \right]^2 + 3f(x, z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, z) - 4 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, z) + 6f(x, z)^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, z) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) + 3f(x, z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, z) - 2 = 0$$

Dado que  $f(0, 0) = 0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) = 0$ , então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4.$$

Assim

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios de  $H_f(0, 0)$  são  $\lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$  e  $\lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$ , e como ambos são positivos,  $(0, 0)$  é um ponto de mínimo local.

5. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar diferenciável tal que  $\nabla f(x, y) = 0$  para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Prove que  $f$  é constante.

**Resolução:** Bastará provar que  $f(p) = f(q)$  para quaisquer  $p, q \in \mathbb{R}^2$ .

Dados  $p, q \in \mathbb{R}^2$ , pelo Teorema de Lagrange, existe  $c \in ]p, q[$  (segmento de recta que une  $p$  e  $q$ ) tal que

$$f(q) - f(p) = \nabla f(c) \cdot (q - p).$$

Sendo, por hipótese  $\nabla f(c) = 0$ , teremos  $f(p) = f(q)$ .