Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

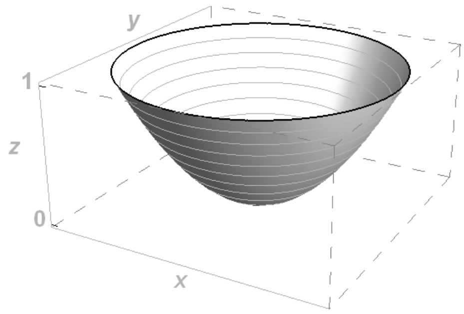
Teste 1 - 09 de Novembro de 2019 - 11h
Duração: 1h30m

Resolução abreviada

[1.0] 1. Indique qual dos conjuntos está representado na figura:

Resolução: B

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = z < 1\}$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z < 1\}$$
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z < 1\}$$



[2.0] 2. Calcule ou mostre que o limite seguinte não existe: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{2\pi y^2}{x^4 + y^2}\right)$.

Resolução:

Fazendo $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{2\pi y^2}{x^4 + y^2}\right)$ tem-se $f(0, y) = \cos(2\pi) = 1$ e $f(x, x^2) = \cos(\pi) = -1$. Portanto, o limite não existe.

[2.0] 3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (xy)^{1/3}$.

Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Será que a função f é diferenciável na origem?

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Para $v = (1, 1)$ tem-se

$$D_v f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}\, |t|^{1/3}}$$

que não existe. Portanto, f não é diferenciável na origem.

[2.0] 4. Seja $v = (2, 1)$ e $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $D_v f\,(1, 3) = 3$. Seja $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tal que $\sigma(0) = (1, 3)$ e $\sigma'(0) = (2, 1)$. Calcule, justificando, $(f \circ \sigma)'(0)$.

Resolução:

$$(f \circ \sigma)'(0) = Df(\sigma(0)) \cdot \sigma'(0) = Df(1, 3) \cdot (2, 1) = Df(1, 3) \cdot v = D_v f\,(1, 3) = 3$$

5. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = 4x + 2y - x^2 - y^2 + 1$.

[2.0] a) Determine os pontos críticos de h e classifique-os.

Resolução:

Pontos críticos:

$$\begin{cases} -2x+4=0 \\ -2y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Classificação:

Os valores próprios da matriz hesseana

$$Hh(2,1)=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são negativos. Portanto, $(2,1)$ é um ponto de máximo relativo de h.

[1.0] b) Mostre que h tem um extremo absoluto.

Resolução:

Notando que, para qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= 4x+2y-x^2-y^2+1 \\ &= (-x^2+4x-4)-(y^2+2y-1)+1+4+1 \\ &= -(x-2)^2-(y-1)^2+6 \\ &\leq 6 = h(2,1), \end{aligned}$$

conclui-se que h tem o seu máximo absoluto no ponto $(2,1)$.

[2.0] 6. Calcule $\iint_A f$ em que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é dada por $f(x,y)=(x-1)(y-1)$ e

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+(y-1)^2<1\,;\,1<x<y\}$$

usando uma mudança de variáveis adequada.

Resolução:

Usando coordenadas polares centradas no ponto $(1,1)$

$$\begin{cases} x=1+r\cos\theta \\ y=1+r\operatorname{sen}\theta, \end{cases}$$

tem-se

$$\iint_A f=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_0^1 r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,dr\right)d\theta=\frac{1}{16}$$

7. Considere o conjunto $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<x<y<1\,;\,x^2<z<1\}$. Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma:

[1.0] a) $\int(\int(\int dz)dy)dx$;

Resolução:

Directamente das inequações tem-se $\mathrm{vol}_3(V)=\int_0^1(\int_x^1(\int_{x^2}^1 dz)dy)dx$.

[2.0] b) $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

Fixando $0 < z < 1$ tem-se $0 < y < 1$, $0 < x < y$, $x < \sqrt{z}$. Assim,

- $x < y$ se $y < \sqrt{z}$
- $x < \sqrt{z}$ se $y > \sqrt{z}$.

Portanto,

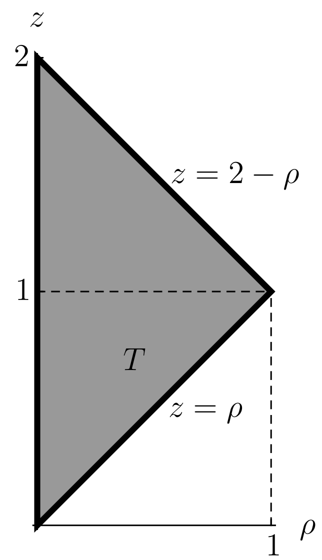
$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{z}} (\int_0^y dx)dy)dz + \int_0^1 (\int_{\sqrt{z}}^1 (\int_0^{\sqrt{z}} dx)dy)dz$$

[2.0] 8. Considere o triângulo plano T definido pelos pontos $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$. Calcule o volume do sólido de revolução que resulta da rotação de $90°$ do triângulo T em torno da sua aresta $[(0,0),(0,2)]$.

Resolução:

Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) o sólido de revolução obtido pela rotação de $90°$ do triângulo T em torno do eixo Oz é descrito pelas inequações

$$\begin{aligned} &0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ &0 < \rho < 1 \\ &\rho < z < 2 - \rho. \end{aligned}$$



Assim, o respectivo volume é dado pelo integral

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left(\int_\rho^{2-\rho} \rho \, dz \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{6}$$

[3.0] 9. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$. Mostre que existem funções $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots n$, tais que $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$, em que $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Resolução:

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = f(tx)$.

Note-se que $h \in C^1$, $h(0) = f(0) = 0$ e $h(1) = f(x)$.

Dado que

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)dt = \int_0^1 \nabla f(tx) \cdot x dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i \right) dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt \right) x_i,$$

fazendo

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt, \ i = 1, 2, \ldots n,$$

obtem-se

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x).$$