

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 8 de Novembro de 2008 - 11h

Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

(3 val.) 1. Considere a função

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se h é contínua na origem.

Resolução: Começamos por ver que

$$\left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|x^2 + |y|y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \leq 2 \|(x, y)\|,$$

logo podemos concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

e portanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 1 + \cos 0 = 2 = h(0, 0),$$

o que mostra que h é contínua na origem.

2. Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \sin(x^2 - y) + e^{yz}$.

(2 val.) a) Calcule a derivada de f segundo o vector $(1, 2, 3)$ no ponto $(-1, 1, 0)$.

Resolução: Sendo f diferenciável em todos os pontos de \mathbb{R}^3 (porque f é claramente de classe C^1 em \mathbb{R}^3), temos

$$\begin{aligned} D_{(1,2,3)}f(-1, 1, 0) &= \nabla f(-1, 1, 0) \cdot (1, 2, 3) \\ &= (2x \cos(x^2 - y), -\cos(x^2 - y) + ze^{yz}, ye^{yz})|_{(-1,1,0)} \cdot (1, 2, 3) \\ &= (-2, -1, 1) \cdot (1, 2, 3) = -1 \end{aligned}$$

(2 val.) b) Calcule o gradiente de $f \circ g$ no ponto $(1, 1)$, onde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é tal que $g(1, 1) = (-1, 1, 0)$ e g é diferenciável no ponto $(1, 1)$ com matriz derivada

$$Dg(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução: Sendo g diferenciável no ponto $(1,1)$ e f diferenciável no ponto $(-1,1,0) = g(1,1)$, temos, pelo teorema da função composta:

$$\begin{aligned}\nabla(f \circ g)(1,1) &= Df(g(1,1))Dg(1,1) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -7 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y, z) = (x^3 + x - 3y - 5, y + z^2)$.

(2 val.) a) Mostre que o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (0, 0)\}$ é uma variedade, e determine a sua dimensão.

Resolução:

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2z \end{bmatrix}$$

portanto F pertence à classe C^1 , e a característica da matriz $DF(x, y, z)$ é 2 para qualquer (x, y, z) pertencente a M (porque a primeira linha da matriz tem sempre pivô $3x^2 + 1 \geq 1 \neq 0$, e a segunda linha também). Assim M é uma variedade, e a sua dimensão é $3 - \text{car}DF(x, y, z) = 3 - 2 = 1$.

(2 val.) b) Determine o espaço normal a M no ponto $(1, -1, 1)$ e indique um elemento não-nulo do espaço tangente a M no mesmo ponto.

Resolução: O espaço normal a M no ponto $(1, -1, 1)$ é gerado pelas linhas de

$$DF(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$(T_{(1,-1,1)}M)^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = c(4, -3, 0) + d(0, 1, 2); c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Os elementos do espaço tangente a M no ponto $(1, -1, 1)$ satisfazem:

$$\begin{cases} 4x - 3y & = 0 \\ y + 2z & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem: z livre, $y = -2z$, $4x = 3y = -6z$. Escolhendo $z = 1$, um elemento não-nulo do espaço tangente a M no ponto $(1, -1, 1)$ é $(-3/2, -2, 1)$.

(3 val.) c) Justifique que numa vizinhança do ponto $(1, -1, 1)$, a variedade pode ser descrita na forma $x = f_1(y)$ e $z = f_2(y)$, com f_1, f_2 funções de classe C^1 , definidas numa vizinhança do ponto $y = -1$. Calcule $f_1'(-1)$ e $f_2'(-1)$.

Resolução: Temos 1) $F \in C^1$, 2) $F(1, -1, 1) = (0, 0)$, 3):

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} \Big|_{(1,-1,2)} = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0.$$

Assim, pelo teorema da função implícita, numa vizinhança do ponto $(1, -1, 1)$, a variedade pode ser descrita na forma $x = f_1(y)$ e $z = f_2(y)$, com f_1, f_2 funções de classe C^1 , definidas numa vizinhança do ponto $y = -1$. Temos ainda:

$$\begin{bmatrix} f_1'(-1) \\ f_2'(-1) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

- (3 val.) 4. Determine os valores máximo e mínimo da função $g(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2)} - z^2$ no conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Resolução: Como o conjunto S é compacto e g é contínua, sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que g tem máximo e mínimo absolutos no conjunto S .

No interior de S procuramos os pontos de estacionaridade de g , ou seja, os pontos onde o gradiente se anula. Como

$$\nabla g(x, y, z) = (-2xe^{-(x^2+y^2)}, -2ye^{-(x^2+y^2)}, -2z),$$

a única solução é a origem e nesse ponto temos $g(0, 0, 0) = 1$.

A fronteira de S é uma variedade de dimensão 2, definida pela equação $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, logo podemos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos de g em ∂S . Consideramos a função $h = g + \lambda F$ e resolvemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla h(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xe^{-(x^2+y^2)} + 2\lambda x = 0 \\ -2ye^{-(x^2+y^2)} + 2\lambda y = 0 \\ -2z + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(\lambda - e^{-(x^2+y^2)}) = 0 \\ 2y(\lambda - e^{-(x^2+y^2)}) = 0 \\ 2z(\lambda - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são os pontos $(0, 0, \pm 1)$ onde o valor da função é $g(0, 0, \pm 1) = 0$ e todos os pontos da circunferência definida pelas equações $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$. Nestes pontos o valor da função é e^{-1} . Portanto o valor máximo da função g no conjunto S é 1 e o valor mínimo é 0.

- (3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada (não necessariamente contínua). Mostre que

$$h(x, y) = x + y + (x^2 + y^2)f(x, y)$$

é diferenciável na origem e calcule $\nabla h(0, 0)$. Dê um exemplo de uma função f tal que h não seja contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

Resolução: A função h é diferenciável na origem sse

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{h(x, y) - h(0, 0) - \nabla h(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y)\|} = 0$$

Usamos a definição para calcular as derivadas parciais de h na origem:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t, 0) - h(0, 0)}{t} = 1,$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(0,t) - h(0,0)}{t} = 1.$$

Assim obtemos $\nabla h(0,0) = (1,1)$ e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0) \cdot (x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} f(x,y).$$

Como f é limitada existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2} f(x,y) \right| = \sqrt{x^2 + y^2} |f(x,y)| \leq M \|(x,y)\|,$$

donde se conclui que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} f(x,y) = 0$$

e h é diferenciável na origem.

Se considerarmos a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

vemos que f é limitada em \mathbb{R}^2 e h é descontínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.