Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 07 de Novembro de 2015 - 08h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos
Resolução abreviada

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[2.0] (a) Mostre que f não é contínua na origem.

Resolução: Não se verifica a condição para continuidade

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0,$$

porque o limite de f na origem relativo ao subconjunto $y = x^3$, $x \neq 0$, é $1/2 \neq 0$.

[1.0] (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

[2.0] (c) Calcule a derivada de f segundo o vetor $(2,-1)$ no ponto $(1,0)$.

Resolução: Calcula-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) &= \left.\frac{(x^6+y^2)3x^2y - x^3y.6x^5}{(x^6+y^2)^2}\right|_{(x,y)=(1,0)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) &= \left.\frac{(x^6+y^2)x^3 - x^3y.2y}{(x^6+y^2)^2}\right|_{(x,y)=(1,0)} = 1. \end{aligned}$$

A função f é diferenciável em todos os pontos $(x,y) \neq (0,0)$, porque é obtida de funções diferenciáveis por adição, multiplicação e divisão. Assim, tem-se:

$$D_{(2,-1)}f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot (2,-1) = (0,1) \cdot (2,-1) = -1.$$

[2.0] 2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(1,1) = 1$ e $\nabla f(1,1) = (1,-1)$. Considere a função g definida por

$$g(x,y) = f(x^2y, f(x^2,y^2)).$$

Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)$).

Resolução: Temos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2y, f(x^2,y^2))2xy + \frac{\partial f}{\partial y}(x^2y, f(x^2,y^2))\frac{\partial f}{\partial x}(x^2,y^2)2x,$$

logo, usando $f(1,1) = 1$ e $\nabla f(1,1) = (1,-1)$, vem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2\times 1 + 2\times(-1)\times 1 = 0.$$

3. Considere a função $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} + \cos z$.

[1.0] (a) Determine os pontos de estacionaridade de f.

Resolução: Dado que $\nabla f(x,y,z) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}, -\operatorname{sen} z)$, os pontos de estacionaridade são: $(0,0,k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[1.0] (b) Classifique os pontos determinados na alínea anterior.

Resolução: A matriz hessiana de f é

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{bmatrix} (4x^2+2)e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} & 0 \\ 4xye^{x^2+y^2} & (4y^2+2)e^{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\cos z \end{bmatrix}.$$

Substituindo nos pontos de estacionaridade, obtemos a matriz

$$D^2 f(0,0,k\pi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k+1} \end{bmatrix},$$

que é indefinida, se k é par, e é definida positiva, se k é ímpar. Portanto $(0,0,k\pi)$ é ponto de sela, se k é par e, se k é ímpar, é ponto de mínimo.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z < 1\,;\, y^2 + z < 1\,;\, x > 0\,;\, y > 0\,; z > 0\}.$$

[3.0] (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

Resolução:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{1-x^2} dz \right) dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_0^{1-y^2} dz \right) dy \right) dx.$$

[2.0] (b) Calcule o volume de A usando um só integral triplo iterado.

Resolução:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} dx \right) dy \right) dz = \frac{1}{2}.$$

[3.0] 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\,;\ y > 0\}.$$

Resolução:

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho}^{2-\rho} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

[3.0] 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujas derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem num ponto (a, b). Prove que, se $\frac{\partial f}{\partial x}$ for contínua numa bola centrada em (a, b), então f é diferenciável nesse ponto.

Resolução: Sendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ contínua numa bola centrada em (a, b), existe $c \in\ ]a,\ a + h[$ tal que

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, b + k)h.$$

Por outro lado, tem-se

$$f(a, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k = \left[\frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] k.$$

Assim,

$$\lim_{(h,k)\to(a,b)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{||(h, k)||} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(a,b)} \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right] h + \left[\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right] k}{||(h, k)||} = 0,$$

porque

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k},$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right] = 0$$

e

$$\frac{|h|}{||(h, k)||} \leq 1, \quad \frac{|k|}{||(h, k)||} \leq 1.$$