Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e
Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 7 de Novembro de 2009 - 11h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

(2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^5}{x^4+y^4}.$$

Resolução:

Começamos por ver que os limites direccionais na origem, segundo rectas $y = mx$ são todos iguais a 0:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^5+y^5}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5+m^5x^5}{x^4+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x+m^5x}{1+m^4} = 0.$$

Logo se existir limite, ele terá que ser zero. Uma vez que

$$\left|\frac{x^5+y^5}{x^4+y^4}\right| \le \frac{x^4|x|+y^4|y|}{x^4+y^4} \le |x|+|y| \le 2\|(x,y)\|,$$

podemos concluir que o limite existe e é igual a 0.

(3 val.) 2. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ as funções

$$f(t) = (1+t^3, 1+\operatorname{sen} t, \log(1+t)) \qquad \text{e} \qquad g(x,y,z) = e^{xyz} - 1.$$

Calcule $D(g \circ f)(0)$ e $D(f \circ g)(1,1,0)$.

Resolução:

Sendo f diferenciável no ponto $0 = g(1,1,0)$ e g diferenciável no ponto $(1,1,0) = f(0)$, temos, pelo regra da derivação da função composta:

$$\begin{aligned} D(g\circ f)(0) &= Dg(f(0))Df(0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D(f\circ g)(1,1,0) &= Df(g(1,1,0))Dg(1,1,0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\,0\;0\;1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade do campo escalar $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por

$$h(x,y,z) = 2x - 6y + 6z - x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2.$$

Resolução:

Os pontos de estacionaridade de f satisfazem:

$$\nabla h(x,y,z) = (2-2x, -6-4y-2z, 6-2y-4z) = (0,0,0).$$

Obtemos a solução $(x,y,z) = (1,-3,3)$. A matriz Hessiana de h é dada por

$$H_h(1,-3,3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix},$$

donde podemos conluir de imediato que $\lambda = -2$ é um valor próprio da matriz.

Podemos considerar a submatriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

e uma vez que $\det A = 12 > 0$ e o traço de A é $-8 < 0$ podemos concluir que os valores próprios da matriz A são ambos negativos e portanto os valores próprios de $H_h(1,-3,3)$ são todos negativos. Logo o ponto $(1,-3,3)$ é um ponto de máximo relativo.

4. Considere o conjunto

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1 \text{ e } x + 2z = 1\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.

Resolução: A função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2-1, x+2z-1)$ é de classe C^1, e a sua matriz jacobiana é

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz possui característica inferior a 2 nos pontos (x,y,z) tais que

$$(2x, 2y, -2z) = t(1,0,2)$$

para algum $t \in \mathbb{R}$, ou seja, nos pontos da forma $(x, y, z) = (\frac{t}{2}, 0, -t)$. Mas estes pontos não pertencem a L, porque não satisfazem a primeira equação. Logo L é uma variedade diferenciável de dimensão $3 - 2 = 1$.

(2 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a L no ponto $(-1, 1, 1)$.
Resolução: O espaço normal a L no ponto $(-1, 1, 1)$ é dado por

$$T^{\perp}_{(-1,1,1)}L = \mathcal{L}\{\nabla F_1(-1, 1, 1), \nabla F_2(-1, 1, 1)\} = \mathcal{L}\{(-2, 2, -2), (1, 0, 2)\}.$$

O espaço tangente a L no ponto $(-1, 1, 1)$ será então

$$\begin{aligned} T_{(-1,1,1)}L &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (-2, 2, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \text{ e } (1, 0, 2) \cdot (a, b, c) = 0\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : -a + b - c = 0 \text{ e } a + 2c = 0\} \\ &= \{(-2c, -c, c) : c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{(-2, -1, 1)\}. \end{aligned}$$

(3 val.) (c) Determine o ponto de L mais afastado da origem.
Resolução: Devemos maximizar a função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

(quadrado da distância à origem) sobre L. Para tal consideramos a função auxiliar

$$f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + \lambda_2(x + 2z - 1)$$

e resolvemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \nabla(f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = 0 \\ F = (0, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ 2y + 2\lambda_1 y = 0 \\ 2z - 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação vemos que $y = 0$ ou $\lambda_1 = -1$. Se $\lambda_1 = -1$ então da primeira equação vem $\lambda_2 = 0$, e da terceira $z = 0$, pelo que as duas últimas equações implicam $x = 1$ e $y = 0$. Se $y = 0$ então as duas últimas equações implicam $z = 0$ e $x = 1$ ou $z = \frac{4}{3}$ e $x = -\frac{5}{3}$. Deste modo obtemos dois pontos de estacionaridade, $(1, 0, 0)$ e $(-\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3})$. Uma vez que L é compacta e f é contínua, o Teorema de Weierstrass garante que um destes pontos será o máximo e o outro o mínimo de f em L. Dado que $f(1, 0, 0) = 1$ e $f(-\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3}) = \frac{41}{9}$, concluímos que o ponto mais afastado da origem é o ponto $(-\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3})$.

(2 val.) (d) Mostre que L é o gráfico de uma função $(x, y) = f(z)$ numa vizinhança do ponto $(-1, 1, 1)$ e calcule $f'(1)$.
Resolução: Consideramos de novo a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 1, x + 2z - 1).$$

Esta função é de classe C^1 e satisfaz $F(-1,1,1) = (0,0)$ e

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(-1,1,1) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{|(-1,1,1)} = \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, sabemos então que L é o gráfico de uma função $(x,y) = f(z)$ numa vizinhança do ponto $(-1,1,1)$. Além disso,

$$\begin{aligned} f'(0) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(-1,1,1)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial z}(-1,1,1) = -\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2z \\ 2 \end{bmatrix}_{|(-1,1,1)} \\ &= -\frac{1}{(-2)} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(3 val.) 5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Mostre que existe um ponto $y \in M$ cuja distância a x é mínima. Mostre ainda que se M é uma variedade então a recta que contém x e y é normal a M em y.

Resolução: O conjunto de números reais positivos

$$D = \{\|x - z\| : z \in M\}$$

possui ínfimo $d \geq 0$. Seja z_k uma sucessão de pontos em M tal que $\|x - z_k\| \to d$. Então a sucessão z_k é limitada, e portanto pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass admite uma subsucessão y_k convergente. Seja y o limite desta sucessão. Como M é um conjunto fechado, $y \in M$. Por outro lado,

$$\|x - y\| = \|x - \lim y_k\| = \lim \|x - y_k\| = d,$$

e portanto $\|x - y\| \leq \|x - z\|$ para todo o $z \in M$.

Uma vez que y é um ponto de mínimo da função $f(z) = \|z - x\|^2$ sobre M, sabemos que se M é uma variedade então $\nabla f(y) \in T_y^{\perp} M$. Mas é fácil ver que $\nabla f(z) = 2(z - x)$, pelo que $y - x \in T_y^{\perp} M$, e portanto a recta que une x a y é normal a M em y.