Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame - 24 de Junho de 2013 - 8h - Versão B

Duração: 1h30m (Teste) / 3h (Exame)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(u,v) = \begin{cases} \dfrac{v}{\sqrt{u^2+2v^2}} & \text{se } (u,v) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (u,v) = (0,0) \end{cases}$$

(0,5 val) (a) Determine se H é contínua na origem.

(1 val) (b) Calcule, ou mostre que não existem, as derivadas parciais de H na origem.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1.

(0,5 val) (a) Sabendo que $\nabla f(1,1) = (2,4)$, calcule $h'(1)$, onde $h(t) = f(t^2, t)$.

(0,5 val) (b) Sabendo que

$$f(t,t^2) = 2t^4 + t^2 \qquad \text{e} \qquad f(t,1) = t^2 + 2, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

determine $\nabla f(-1,1)$.

(2 val) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$g(x,y) = \frac{1}{x} - xy^2 + xy.$$

4. Considere o sólido W dado por

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 2 \, , \, 0 < x < 4 - y^2 \, , \, 0 < z < 4 - x\} \, .$$

(1 val) (a) Escreva uma expressão para o volume de W em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(1,5 val) (b) Calcule o volume de W usando a ordem de integração $\int(\int(\int dz)dx)dy$.

(1,5 val) 5. Seja B o sólido dado por:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < x^2 + y^2 \, , \, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \, , \, y > 0\} \, .$$

Através de uma mudança de coordenadas para coordenadas esféricas, calcule o volume de B.

(1,5 val) 6. Considere uma função diferenciável $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onde

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\},$$

satisfazendo a propriedade

$$Df(a)v \cdot v > 0, \, \forall a \in B_1(0), \, \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Mostre que f é injectiva.

Sugestão: Dados $x, y \in B_1(0)$, considere a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = f(x + t(y-x)) \cdot (y-x).$$

Teste 2

1. Considere o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - z)^2 + y^2 = 1\}.$$

(0,5 val) (a) Mostre que B é uma variedade e determine a sua dimensão.

(1 val) (b) Determine os pontos de B em que o vector $(0, 1, 0)$ é normal a B.

(1,5 val) 2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} (x+y)^2 & = & u^2 - v^3 \\ x - y & = & u + v^2 \end{cases}$$

Determine se numa vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (1, 0, 1, 0)$ as soluções do sistema são dadas por um gráfico de uma função de classe C^1 da forma $(x, y) = f(u, v)$. Em caso afirmativo, calcule $Df(1, 0)$.

3. Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, 1 < x < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária n tal que $n_x < 0$.

(1 val) (a) Calcule a área de M.

(2 val) (b) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (x^2, -xy, -xz)$ através de M no sentido de n, utilizando o teorema da divergência.

(2,5 val) (c) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (x^2, -xy, -xz)$ através de M no sentido de n, utilizando o teorema de Stokes.

(1,5 val) 4. Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão k, para algum $k < n$. Seja $p \in W$ e $v \in \mathbb{R}^n$ um vector tangente a W em p. Mostre que, para algum $\epsilon > 0$, existe um caminho de classe C^1

$$g :]-\epsilon, \epsilon[\to W,$$

com $g(0) = p$, tal que

$$\frac{dg}{dt}(0) = v.$$