Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame - 24 de Junho de 2013 - 15h - Versão B

Duração: 1h30m (Teste) / 3h (Exame)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{u\,v^2}{2u^2+v^2} & \text{se } (u,v) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (u,v) = (0,0) \end{cases}$$

(0,5 val) (a) Determine em que pontos g é contínua.

(1 val) (b) Calcule a derivada de g segundo o vector $v = (2,1)$ na origem.

2. Sendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = x + x^2y + y^2$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 que satisfaz

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{-n}{n^2+1}, \frac{n^2-n}{n^2+1}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

(0,5 val) (a) Calcule $g(0)$ e $g'(0)$;

(0,5 val) (b) Calcule $(h \circ g)'(0)$.

(2 val) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 e^y.$$

4. Considere o sólido V

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x < 2y < 2 \ , \ 0 < z < 1 + y^2\} \ .$$

(1 val) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(1,5 val) (b) Calcule o integral $\int_V x$ usando a ordem de integração $\int(\int(\int dz)dx)dy$.

(1,5 val) 5. Seja A o sólido dado por:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2+z^2} < y < 1\} \ .$$

Calcule o momento de inércia de A relativo ao eixo Oy considerando uma densidade de massa $\beta(x,y,z) = y$.

(1,5 val) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(2,1) = 2$, f é diferenciável no ponto $(2,1)$ e $\nabla f(2,1) = (1,4)$. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(x,y) = \left(\frac{-4}{f(x,y)} + 4 \, , \ f(-3y + f(x,y) + 3, -x/4 + 3/2) - 1\right).$$

Calcule $DH^m(2,1)$, onde H^m é a composição m vezes da função H com si própria.

Teste 2

1. Considere o conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (z-y)^2 + x^2 = 1,\ x+y+z = 1\}.$$

(0,5 val) (a) Mostre que B é uma variedade e determine a sua dimensão.

(1 val) (b) Determine um vector tangente a B no ponto $(0,0,1)$.

(1,5 val) 2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} (x-z)^2 &= y \\ x+2z &= 1+\log y \end{cases}$$

Determine se numa vizinhança do ponto $(x,y,z) = (1,1,0)$ as soluções do sistema são dadas por um gráfico de uma função de classe C^1 da forma $(y,z) = f(x)$. Em caso afirmativo, calcule $f'(1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2+z^2}, 1 < y < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária n tal que $n_y > 0$.

(2,5 val) (a) Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (-xy, 1+y^2, -yz)$ através de S no sentido de n.

(1 val) (b) Calcule o fluxo de rot F através de S no sentido de n, onde F é o campo da alínea anterior.

(2 val) (c) Calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (3,2,1)$ através de S no sentido de n, utilizando o teorema de Stokes.

(1,5 val) 4. Seja $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$. Considere um campo vectorial de classe C^1,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} &\to \mathbb{R}^3 \\ F(x,y,z) &= \phi(r)(x,y,z), \end{aligned}$$

onde $\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Sabendo que div $F = 0$ e que $F(1,0,0) = (3,0,0)$, determine $\phi(r)$.