

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame - 24 de Junho de 2013 - 15h - Versão A

Duração: 1h30m (Teste) / 3h (Exame)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{3x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(0,5 val)

(a) Determine em que pontos f é contínua.

(1 val)

(b) Calcule a derivada de f segundo o vector $v = (1, 2)$ na origem.

2. Sendo $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = x^2 + xy^2 + y$, e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 que satisfaz

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 1}, \frac{n}{n^2 + 1}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(0,5 val)

(a) Calcule $h(0)$ e $h'(0)$;

(0,5 val)

(b) Calcule $(g \circ h)'(0)$.

(2 val)

3. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = e^{-x}x^2 + y^2 - y.$$

4. Considere o sólido W

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 2x < 2, 0 < z < 1 + x^2\}.$$

(1 val)

(a) Escreva uma expressão para o volume de W em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(1,5 val)

(b) Calcule o integral $\int_W y$ usando a ordem de integração $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(1,5 val)

5. Seja B o sólido dado por:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} < x < 1\}.$$

Calcule o momento de inércia de B relativo ao eixo Ox considerando uma densidade de massa $\alpha(x, y, z) = x$.

(1,5 val)

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(2, 1) = 2$, f é diferenciável no ponto $(2, 1)$ e $\nabla f(2, 1) = (1, 4)$. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(x, y) = \left(\frac{-4}{f(x, y)} + 4, f(-3y + f(x, y)) + 3, -x/4 + 3/2 - 1 \right).$$

Calcule $DH^m(2, 1)$, onde H^m é a composição m vezes da função H com si própria.

Teste 2

1. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y)^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}.$$

- (0,5 val) (a) Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão.
(1 val) (b) Determine um vector tangente a A no ponto $(1, 0, 0)$.

(1,5 val) 2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} (x + y)^2 = z \\ x - 2y = 1 + \log z \end{cases}$$

Determine se numa vizinhança do ponto $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ as soluções do sistema são dadas por um gráfico de uma função de classe C^1 da forma $(x, y) = f(z)$. Em caso afirmativo, calcule $f'(1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{y^2 + z^2}, 1 < x < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária n tal que $n_x > 0$.

- (2,5 val) (a) Calcule o fluxo de $F(x, y, z) = (1 + x^2, -xy, -xz)$ através de S no sentido de n .
(1 val) (b) Calcule o fluxo de $\text{rot } F$ através de S no sentido de n , onde F é o campo da alínea anterior.
(2 val) (c) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (1, 2, 3)$ através de S no sentido de n , utilizando o teorema de Stokes.

(1,5 val) 4. Seja $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Considere um campo vectorial de classe C^1 ,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(x, y, z) &= \phi(r)(x, y, z), \end{aligned}$$

onde $\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 . Sabendo que $\text{div } F = 0$ e que $F(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$, determine $\phi(r)$.