Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Testes de Recuperação/Exame (versão 1) - 30 de Janeiro de 2017 - 11h30
Duração: 90 minutos/3horas
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

(1.5 val.) 1. Determine, ou mostre que não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+2y}{2x^2+y^2}.$$

2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 e seja $f(x,y) = h(x^2-y^2, x+y^3)$.

(1.0 val.) a) Determine um vector não nulo, $v \in \mathbb{R}^2$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 0$.

(1.0 val.) b) Determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$ em termos das derivadas parciais de h no ponto (0,2).

(1.5 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por

$$g(x,y,z) = y^2(x+y) + y - x + z^2.$$

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2,\ 0 \leq x^2+y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}.$$

(1.0 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(1.0 val.) b) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(1.5 val.) c) Calcule o volume de A, usando uma mudança de variáveis adequada.

(1.5 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua e seja $f_y(x) = f(x,y)$ para $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.
Mostre que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(y) = \int_1^2 f_y(x)dx$$

é contínua.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação/Exame (versão 2) - 30 de Janeiro de 2017 - 11h30
Duração: 90 minutos/3 horas
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 2

1. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y-1)^2 + z^2 = 2,\ x + z = 2\}.$$

(0.5 val) a) Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão.

(1.0 val) b) Determine um vector tangente a A no ponto $(1, 0, 1)$.

(1.0 val) c) Determine os extremos da função $f(x, y, z) = y + z$, em A.

(2.0 val) 2. Mostre que, numa vizinhança do ponto $(x, y, z) = (1, 0, 1)$, o sistema de equações seguinte

$$\begin{cases} (x+y)^2 &= z \\ x - 2y &= 1 + \log z \end{cases}$$

define x e y como funções de z, de classe C^1. Calcule $x'(1)$ e $y'(1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z > 0\},$$

orientada segundo a normal unitária n tal que $n_z < 0$, e o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y, -x, 1 + 3z).$$

(2.0 val) a) Calcule o fluxo do campo F através de S no sentido da normal n, usando o teorema da divergência.

(2.0 val) b) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de S no sentido da normal n, usando o teorema de Stokes.

(1.5 val) 4. Dê um exemplo de um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ com divergência nula e que não seja o rotacional de outro campo vectorial. Para esse campo, calcule o seu fluxo através do elipsóide dado por $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$, no sentido da normal n tal que $n(2, 0, 0) = (1, 0, 0)$.