Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II
TESTE 2 - VERSÃO A
3 de Junho de 2013 - das 11h00 às 12h30

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4 + 2z\} .$$

[1.5 v] (a) Mostre que S é uma variedade e determine a sua dimensão.

[1.5 v] (b) Determine o espaço tangente a S no ponto $(2, 0, 0)$.

[3 v] 2. Mostre que

$$\begin{aligned} u^2 - v &= 3x + y \\ 4u - 2v^2 &= x - 2y \end{aligned}$$

define implicitamente (u, v) como função de (x, y) numa vizinhança de $(x, y, u, v) = (0, 4, -2, 0)$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 4)$.

3. Considere o campo vectorial $F(x, y) = \left(-\ln(1 + y), \dfrac{xy}{1 + y}\right)$.

[1 v] (a) Mostre que F não é gradiente no seu domínio.

[2 v] (b) Considere a linha triangular com vértices nos pontos $(1/2, 0), (0, 3), (-1/2, 0)$. Usando o Teorema de Green, calcule o trabalho realizado pelo campo F quando esta linha é percorrida uma vez no sentido anti-horário.

[4 v] 4. Considere a pirâmide $P \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$. Considere o campo vectorial $H(x, y, z) = \left(3, (z^3 + x^2)y, -x^2 z - \frac{1}{4}z^4\right)$. Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de H através da face de P que está contida no plano $x + y + z = 1$, no sentido da normal unitária exterior.

5. Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2 = \sqrt{y^2 + z^2} \ , \ 0 < x < 1\} ,$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_x > 0$.

[1 v] (a) Determine um campo vectorial A da forma $A(x, y, z) = (p(y, z), 0, -yz)$ tal que $rot\, A = G$, onde $G(x, y, z) = (-z, z, y)$.

[3 v] (b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial G através de M no sentido da normal n.

[3 v] 6. Considere o aberto $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| < 3\}$. Mostre que, para quaisquer campos escalares f e g de classe C^2 tal que $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ quando $||x|| > 2$, se tem

$$\int_D f \, div \nabla g = \int_D (div \nabla f) \, g \, .$$