

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação 2 (versão 1) - 3 de julho de 2019 - 10h

Duração: 1h30m

Todos os cursos excepto LMAC, MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja M o conjunto de \mathbb{R}^3 definido por $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + xy + y^2 + z^2 = 1\}$.

[1.5] a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

[0.5] b) Justifique que M é um conjunto compacto.

[2.0] c) Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y, z) = y$. Determine os extremos globais de f .

2. Considere o sistema de equações
$$\begin{cases} x^4 + xyz + y^4 = 1 \\ x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 = 1 \end{cases}$$

[1.5] a) Mostre que o sistema define y e z como funções de x numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$.

[1.5] b) Determine $y'(0)$ e $z'(0)$.

[1.0] c) Mostre que a função $y = y(x)$ tem um extremo em $x = 0$ e classifique-o.

3. Considere o campo vectorial $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $H(x, y, z) = (-x, 0, z)$ e a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5; y \leq 2; z \leq 2\}.$$

[2.0] a) Mostre que H tem divergência nula e determine um potencial vectorial associado, com a terceira componente nula.

[3.0] b) Determine o fluxo de H através de S , no sentido da normal que em cada ponto de S aponta no sentido oposto ao da origem.

4. Considere a superfície \mathcal{S}_α e a curva Γ_α definidas por

$$\mathcal{S}_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; z = \alpha xy\}$$

e $\Gamma_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; z = \alpha xy\}$, onde α é um parâmetro real.

[2.0] a) Determine a área de \mathcal{S}_α em função de α .

[1.0] b) Designando por $L(\alpha)$ o comprimento de Γ_α , escreva um integral cujo valor seja igual a $L(\alpha)$.

[1.0] c) Justifique que $L(\alpha) = 2\pi + \frac{\pi}{2}\alpha^2 + R_2(\alpha)$, para α suficientemente pequeno, onde R_2 é o resto de segunda ordem da fórmula de Taylor de L em torno de zero.

5. Seja $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por $f(x) = \|x\|^p x$, $p \in \mathbb{R}$ e onde $\|x\|$ denota a norma euclidiana de x .

[0.5] a) Calcule o fluxo de f através da superfície da esfera de raio ϵ centrada na origem, em relação à normal exterior.

[0.5] b) Determine $\operatorname{div}(f)$.

[2.0] c) Seja $\Omega \in \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto limitado que contém a origem e ao qual é possível aplicar o teorema da divergência. Utilize os resultados anteriores para mostrar que existe um único valor de p para o qual o fluxo de f , através de $\partial\Omega$ no sentido da normal exterior, é independente de Ω . Calcule o valor desse fluxo.