Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
1º Teste de Recuperação - 26 de Junho de 2009 - 9h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3x + 2y + \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{2}{3}}$.

(2 val.) (a) Calcule as derivadas parciais de f na origem.

(2 val.) (b) Mostre que f é diferenciável na origem.

(3 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável tal que $Dg(3,2,1) = [-1 \quad 2 \quad 1]$, e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função $h(x,y) = g(x+y, xy, x-y)$. Determine $Dh(2,1)$.

(4 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y) = 5x - x^5 + y^2$.

(2 val.) 4. (a) Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$ possui inversa de classe C^1 quando restrita a uma vizinhança suficientemente pequena do ponto $(0,0)$.

(2 val.) (b) Seja $f^{-1}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ a inversa local de f. Mostre que a função $x(u,v)$ não possui pontos de estacionaridade.

(2 val.) (c) Calcule a matriz Hessiana da função $x(u,v)$ no ponto $(1,0)$.

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^n$. Mostre que a derivada de f segundo o vector $v \in \mathbb{R}^n$ no ponto a existe e é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)v,$$

onde $Df(a)$ é a derivada de f em a.