

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEB, LEBM, LEFT, LEMAT, LEQ, LMAC, LQ
TESTE DE RECUPERAÇÃO – 18 DE JUNHO DE 2007 – **TESTE 1**

Apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

- (3 val.) (1) Diga, justificando, se a seguinte função $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 2y^2}$$

tem limite no ponto $(0, 0)$.

- (3 val.) (2) Determine e classifique os pontos críticos do campo escalar dado por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$$

- (3) Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} e^x \cos(v) + ux - yv = 0 \\ e^x \sin(v) + uv + yx = 0. \end{cases}$$

- (3 val.) a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, -e, 0)$, y e u como funções de classe C^1 , de x e v .

- (2 val.) b) Calcule $\frac{\partial y}{\partial v}(1, 0)$.

- (4) Considere o conjunto

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1; y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

- (2 val.) a) Mostre que B é uma variedade e determine a sua dimensão.

- (2 val.) b) Encontre o espaço tangente a B no ponto $P = (-\frac{2}{3}\sqrt{2}, 1, 0)$.

- (2 val.) c) Parametrize B numa vizinhança do ponto P .

- (3 val.) (5) Encontre uma função de classe C^1 , $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que o ponto $Q = (0, 1, 1)$ seja um máximo da restrição de f à variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$$

e tal que $\nabla f(Q) \neq 0$.