Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação 1 (versão 2) - 3 de Julho de 2019 - 8h

Duração: 1h30m

Todos os cursos excepto LMAC, MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = 1 + \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

[2.0] a) Mostre que g é prolongável por continuidade à origem. Sendo $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o seu prolongamento, determine $G(0,0)$.

[2.0] b) Determine, justificadamente, se G é diferenciável na origem.

[2.5] 2. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = h(x^2y, x^2-y^2, y^2x)$ onde $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que satisfaz $\nabla h(1,0,1) = (1,2,1)$, determine a derivada de f no ponto $(1,1)$ segundo o vector $v = (1,3)$.

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por

$$g(x,y) = x^2 + yx^2 + 4y^2 + 2y^3.$$

[2.5] 4. Determine os pontos da superfície $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - z^2 + 1 = x\}$ tais que a recta normal à superfície em cada um desses pontos passa pela origem.

[3.0] 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 - \sqrt{x^2+y^2} < z < 3 - 2(x^2+y^2);\ x > 0\}.$$

[2.0] 6. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Trocando a ordem de integração, mostre que

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{1-x-y}^1 g(z)\,dz\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 g(z)z(2-z)\,dz.$$

[3.0] 7. Prove o *Teorema de Pappus*: Se D é uma região limitada no primeiro quadrante do plano xy com área $B > 0$, então o volume do sólido que se obtém por rotação de D em torno do eixo $0y$ é dado por

$$V = 2\pi B\bar{x}$$

onde $\bar{x}$ é a coordenada x do centróide da região D.