Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação 1 (versão 1) - 3 de Julho de 2019 - 8h
Duração: 1h30m
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

[2.0] a) Mostre que f é prolongável por continuidade à origem. Sendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o seu prolongamento, determine $F(0,0)$.

[2.0] b) Determine, justificadamente, se F é diferenciável na origem.

[2.5] 2. Sendo $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x,y,z) = g(x^2-y^2, y^2-z^2)$ onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que satisfaz $\nabla g(0,0) = (1,2)$, determine a derivada de h no ponto $(1,1,1)$ segundo o vector $v = (2,0,1)$.

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

[2.5] 4. Determine os pontos da superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + 1 = z\}$ tais que a recta normal à superfície em cada um desses pontos passa pela origem.

[3.0] 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-1 < z < \sqrt{x^2+y^2}+1;\ y > 0\}.$$

[2.0] 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Trocando a ordem de integração, mostre que

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(z)\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(1-z^2)\,dz.$$

[3.0] 7. Prove o *Teorema de Pappus*: Se R é uma região limitada no primeiro quadrante do plano xy com área $A > 0$, então o volume do sólido que se obtém por rotação de R em torno do eixo $0y$ é dado por

$$V = 2\pi A\bar{x}$$

onde $\bar{x}$ é a coordenada x do centróide da região R.