Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame - 27 de Janeiro de 2014 - 12h - Versão 1
Duração: 1h30 (Teste) / 3h Exame

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

(1,5 val.) 1. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} 3-\frac{x^3y^2}{(2x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ a, & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Determine, justificando, o valor de a para que f seja contínua na origem.

(1,5 val.) 2. Seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ a função definida por

$$g(x,y)=(xy,2x+y,3x)$$

e $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $Df(-1,1,3)=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada de $f\circ g$ no ponto $(1,-1)$ segundo o vector $v=(1,1)$.

(1,5 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y,z)=\frac{x^3}{3}-x+y^2+yz+z^2.$$

4. Considere a região $V\subset\mathbb{R}^3$ definida por

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ 0<y<x<1,\ \ \ y^2<z<2-y^2\}.$$

(1,5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(1 val.) b) Calcule o volume de V.

(1,5 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o volume do sólido

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 4-x^2-y^2<z<2+x^2+y^2,\ \ x^2+y^2<4,\ \ x>0,\ \ y>0\}.$$

(1,5 val.) 6. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^5 tal que as únicas derivadas parciais não nulas de f até à ordem 4 no ponto $(0,0)$ são $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$ e $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(0,0)$. Sabendo que

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)+6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(0,0)\right)<0,$$

mostre que f tem um ponto de sela em $(0,0)$.

Teste 2

7. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 3 = 0,\ y - z = 0\}$$

(0,5 val.) a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

(0,5 val.) b) Determine o espaço normal a M no ponto $(\sqrt{3}, 0, 0)$.

(1 val.) c) Justifique que a função $f(x, y, z) = z$ tem uma máximo e um mínimo em M e determine os seus valores.

8. Considere a função

$$F(x, y, z) = g(x, y) + \ln(xz + e^y)$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $g(1, 0) = 0$ e $\nabla g(1, 0) = (0, 1)$.

(1 val.) a) Mostre que existe uma vizinhança do ponto $(1, 0, 0)$ onde a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como função de classe C^1 de x e y.

(0,5 val.) b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$.

(1 val.) 9. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $F(x, y, z) = \big(y^2 + 2xz, 2xy, x^2\big)$ ao longo do caminho

$$(h(t), 2\cos t, 2\sin t),\ \ t \in [0, 2\pi],$$

onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 que satisfaz $h(0) = 1$ e $h(2\pi) = \pi$.

10. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < z < 1,\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

orientada com a normal unitária n com terceira componente negativa.

(1 val.) a) Calcule a massa de S sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

(1,5 val.) b) Determine o fluxo do campo $F(x, y, z) = (\sin y^2 + 2x, y + \cos z^2, -3z)$ através de S no sentido de n.

(1,5 val.) c) Calcule, usando o Teorema de Stokes, o trabalho do campo $G(x, y, z) = (z, 0, 0)$ ao longo de ∂S percorrido no sentido induzido por n.

(1,5 val.) 11. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável tal que ∂M é uma circunferência, e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 tal que rot F é tangente a M em cada ponto. Mostre que existe um ponto de ∂M onde F é normal a ∂M.