Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Teste de Recuperação - 04 de Janeiro de 2008 - 13h

Duração: 1h30m

Teste I

(3 val.) 1. Considere

$$h(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine, justificando, se h é ou não contínua na origem.

(3 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1, tal que

$$Df(1,2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e seja $g(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$.

Calcule a derivada $D(g^{-1} \circ f)(1,2,1)$ sabendo que $f(1,2,1) = g(1,1) = (0,2)$.

3. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}.$$

(2 val.) a) Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.) b) Determine os pontos de A em que o respectivo espaço tangente é horizontal.

(2 val.) c) Parametrize A.

(2 val.) d) Considere a curva C contida em A definida por $z = xy$ e $x^2 + 3y^3 + 4z^3 = 8$. Mostre, justificando, que na vizinhança do ponto $(1,1,1)$, C é descrita por um gráfico da forma $(x(z), y(z), z)$. Determine $x'(1)$ e $y'(1)$.

(3 val.) 4. Determine e classifique os pontos críticos da função $h(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$.

(3 val.) 5. Demonstre o teorema da função inversa utilizando o teorema da função implícita.

Teste II

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 2 - x - y \,;\, 0 < x < 1 \,;\, 0 < y < 1\}.$$

(1 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$.

(2 val.) b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

(1 val.) c) Calcule o integral da função $f(x,y,z) = x$ em V.

(3 val.) 2. Através de uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido D descrito por

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > |x| \,;\, x^2 + y^2 \leq 1 \,;\, 0 < z < \frac{1}{1 + (x^2+y^2)^2} \right\},$$

e cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = x^2 + y^2$.

3. Considere a superfície

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = z^2 \;; 1 < z < 2\}.$$

e o campo vectorial $F(x,y,z) = (0, 1, -1)$.

(2 val.) a) Determine um potencial vectorial para F da forma $A = (A_1, 0, 0)$.

(2 val.) b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal n com terceira componente positiva.

(3 val.) c) Calcule o fluxo da alínea anterior usando o teorema da divergência.

(3 val.) 4. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (0, xz, 3xzy^2)$ e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = -x^2 + y^3 \;; 0 < x < 1 \,;\, 0 < y < 1\}.$$

Calcule o fluxo de F através de S no sentido da normal n cuja terceira componente é positiva.

(3 val.) 5. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (-\phi(y), \phi(x), 1)$ em que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{x} \cos(t^2) dt.$$

Mostre que se tem $|\int_C F| \leq 2$, em que C é a circunferência definida por $x^2 + y^2 = 1 \,;\, z = 0$.